Лекция 8. Определённый интеграл. Определенный интеграл Римана

Пусть

*f* (*x*)

– некоторая функция, определенная на отрезке [*a*, *b*]. Произведем

разбиение *R* отрезка [*a*, *b*]

на п частей:

*a*  *x*0  *x*1 K  *xn*  *b* . Выберем на каждом из

получившихся отрезков по точке

*i*  [*xi* , *xi*1]. Составим сумму

*n*1

*SR*  ∑ *f* (*i* )*xi* ,

*i*0

где

*xi*  *xi*1  *xi*

– длина отрезка [*xi* , *xi*1].



Рисунок .1

Сумма *SR*

называется интегральной суммой Римана, соответствующей

разбиению *R*. Геометрически *SR*

представляет собой алгебраическую сумму площадей

соответствующих прямоугольников (см. рис. 1).

Пусть *n*   так, чтобы все

*xi*  0 , т.е. max *xi*  0 . Если при этом

последовательность интегральных сумм *SR*

стремится к конечному пределу, не

зависящему от способа разбиения отрезка [*a*, *b*]

на части и от выбора точек

*i* , то этот

предел называется определенным интегралом от функции

*f* (*x*)

на отрезке [*a*, *b*] и

обозначается

*b*

∫ *f* (*x*)*dx* . Таким образом,

*a*

*b n*1

∫ *f* (*x*)*dx*  lim *SR*  lim ∑ *f* (*i* )*xi* . (1)

*a* max *xi* 0 max *xi* 0 *i* 0

Если существует определенный интеграл от функции

*f* (*x*)

на отрезке [*a*, *b*], то

говорят, что функция

*f* (*x*)

интегрируема на этом отрезке.

Теорема **1.** Если функция интегрируема на отрезке [*a*, *b*], то она ограничена на этом отрезке.

Таким образом, ограниченность является необходимым условием интегрируемости.

Достаточным условием интегрируемости является непрерывность функции.

Теорема **2.** Если функция непрерывна на [*a*, *b*], то она интегрируема на этом отрезке.

На самом деле интегрируемыми будут также функции, имеющие на отрезке [*a*, *b*]

конечное число точек разрыва первого рода. Такие функции называются кусочно- непрерывными.

Функция *f* (*x*) , определенная на отрезке [*a*, *b*], называется кусочно*-*непрерывной на

этом отрезке, если существует такое разбиение отрезка [*a*, *b*]:

*a*  *x*0  *x*1 K  *xn*  *b* ,

что

*f* (*x*)

непрерывна на каждом интервале

(*xi* , *xi*1)

и существуют конечные пределы

на концах интервала

lim

*x* *xi* 0

*f* (*x*) и

lim

*x* *xi*1 0

*f* (*x*) .

Теорема **3.** 1) Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

2) Пусть

*f* (*x*) и

*g*(*x*)

определены на отрезке [*a*, *b*] и

*x* (*a*, *b*)

*f* (*x*)  *g*(*x*) . Тогда

если

*f* (*x*)

интегрируема на [*a*, *b*], то и

*g*(*x*)

интегрируема на [*a*, *b*], и

*b b*

∫ *f* (*x*)*dx*  ∫ *g*(*x*)*dx* .

*a a*

Таким образом, изменение значения функции на концах отрезка (а, вообще говоря, и в любом конечном числе точек отрезка) не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, если, конечно, данная функция интегрируема.

1. Свойства определенного интеграла
2. Свойство аддитивности: Если

*f* (*x*)

интегрируема на [*a*, *b*]

и *a*  *c*  *b* , то

*f* (*x*)

интегрируема и на [*a*, *c*] и на [*c*, *b*], и при этом

*b c b*

∫ *f* (*x*)*dx*  ∫ *f* (*x*)*dx*  ∫ *f* (*x*)*dx* .

*a a c*

1. Справедливо следующее:

*a*

∫ *f* (*x*)*dx*  0 ,

*a*

*b a*

∫ *f* (*x*)*dx*  ∫ *f* (*x*)*dx* .

*a b*

1. Свойство линейности: если

*f* (*x*) и

*g*(*x*)

интегрируемы на [*a*, *b*], то

*f* (*x*)  *g*(*x*)

также интегрируема на [*a*, *b*], и при этом

*b b b*

∫*f* (*x*)  *g*(*x*) *dx*  ∫ *f* (*x*)*dx*  ∫ *g*(*x*)*dx* .

*a a a*

1. Свойство монотонности: если

*f* (*x*) и

*g*(*x*)

интегрируемы на [*a*, *b*] и

*x* [*a*, *b*]

*f* (*x*)  *g*(*x*) , то

*b b*

∫ *f* (*x*)*dx*  ∫ *g*(*x*)*dx* .

1. *a*

этом

1. Если

*f* (*x*)

интегрируема на [*a*, *b*], то

*f* (*x*)

также интегрируема на [*a*, *b*], и при

1. *b*

∫ *f* (*x*)*dx*  ∫

*f* (*x*) *dx* .

*a a*

* 1. Теоремы о среднем

Теорема **4.** (Первая теорема о среднем). Если

*f* (*x*)

интегрируема на [*a*, *b*], и

*m*  inf

[*a*,*b*]

*f* (*x*) ,

*M*  sup

[*a*,*b*]

*f* (*x*) , то

*b*

*m*(*b*  *a*)  ∫ *f* (*x*)*dx*  *M* (*b*  *a*) . (9.2)

*a*

Доказательство**.** Так как

*x* [*a*, *b*]

*m*  *f* (*x*)  *M* , то по свойству монотонности

*b b b*

∫ *mdx*  ∫ *f* (*x*)*dx*  ∫ *Mdx* . (9.3)

*a a a*

По определению определенного интеграла (9.1) и по свойству линейности имеем

*b b n*1

*n*1

∫ *mdx*  *m*∫ *dx*  *m* lim ∑ *xi*  *m*

lim ∑  *xi*1  *xi*  

*a a* max *xi* 0 *i*0

max *xi* 0 *i*0

 *m*  *xn*  *x*0   *m*(*b*  *a*).

Аналогично

*b*

∫ *Mdx*  *M* (*b*  *a*) . Тогда из (9.3) получаем

*a*

*b*

*m*(*b*  *a*)  ∫ *f* (*x*)*dx*  *M* (*b*  *a*) ,

*a*

что и требовалось.

Следствие**.** Если

*f* (*x*)

непрерывна на [*a*, *b*], то существует число

[*a*, *b*], такое

что

*b*

∫ *f* (*x*)*dx* 

*a*

*f* ()(*b*  *a*) .

В самом деле, так как

*f* (*x*)

непрерывна на [*a*, *b*], то она интегрируема на [*a*, *b*] и по

свойству функций, непрерывных на отрезке, достигает на нем своих наибольшего и

наименьшего значений *m*  min *f* (*x*) и

[*a*,*b*]

*M*  max *f* (*x*) , тогда справедлива первая теорема о

[*a*,*b*]

среднем. Разделим неравенство (9.2) на *b*  *a*  0 , получим

1 *b*

*m*  *b*  *a* ∫ *f* (*x*)*dx*  *M* .

*a*

По свойству функций, непрерывных на отрезке, существует [*a*, *b*], такое что

1 *b b*

*f* ()  *b*  *a* ∫ *f* (*x*)*dx*

*a*

или

∫ *f* (*x*)*dx* 

*a*

*f* ()(*b*  *a*) .

Теорема **5.** (Вторая теорема о среднем). Если

*f* (*x*) и

*g*(*x*)

интегрируемы на [*a*, *b*]

и, кроме того, *g*(*x*)  0 , то

*b b b*

*m*∫ *g*(*x*)*dx*  ∫ *f* (*x*)*g*(*x*)*dx*  *M* ∫ *g*(*x*)*dx* , (4)

*a a a*

где

*m*  inf

[*a*,*b*]

*f* (*x*) ,

*M*  sup

[*a*,*b*]

*f* (*x*) .

Доказательство**.** Так как

*x* [*a*, *b*]

*m*  *f* (*x*)  *M*

и *g*(*x*)  0 , то

*mg*(*x*) 

*f* (*x*)*g*(*x*)  *Mg*(*x*) . Тогда по свойству монотонности

*b b b*

∫ *mg*(*x*)*dx*  ∫ *f* (*x*)*g*(*x*)*dx*  ∫ *Mg*(*x*)*dx*

*a a a*

или

*b b b*

*m*∫ *g*(*x*)*dx*  ∫ *f* (*x*)*g*(*x*)*dx*  *M* ∫ *g*(*x*)*dx* .

*a a a*

что

Следствие**.** Если

*f* (*x*)

непрерывна на [*a*, *b*], то существует число

[*a*, *b*], такое

*b b*

∫ *f* (*x*)*g*(*x*)*dx*  *f* ()∫ *g*(*x*)*dx* .

*a a*

Действительно, так как

*f* (*x*)

непрерывна на [*a*, *b*], то по свойству функций,

непрерывных на отрезке, существуют

,[*a*, *b*] , такие что

*f* ()  *m*  min *f* (*x*) и

[*a*,*b*]

*f* ()  *M*  max *f* (*x*) , тогда справедлива вторая теорема о среднем. Если

[*a*,*b*]

*b*

∫ *g*(*x*)*dx*  0 , то

*a*

*b*

∫ *f* (*x*)*g*(*x*)*dx*  0 . Если

*a*

*b*

∫ *f* (*x*)*g*(*x*)*dx*

*b*

∫ *g*(*x*)*dx*  0 , то разделим неравенство (9.4) на

*a*

*b*

∫ *g*(*x*)*dx* , получим

*a*

*m*  *a*  *M* . Снова по свойству функций, непрерывных на отрезке, существует

*b*

∫ *g*(*x*)*dx*

*a*

*b*

∫ *f* (*x*)*g*(*x*)*dx b b*

[*a*, *b*], такое что

*f* ()  *a b*

или

∫ *f* (*x*)*g*(*x*)*dx* 

*f* ()∫ *g*(*x*)*dx* .

∫ *g*(*x*)*dx a a a*

* 1. Интеграл как функция верхнего предела

*x*

Определим функцию *F* (*x*)  ∫ *f* (*t*)*dt* , где

*a*

функцией верхнего предела.

*x* [*a*, *b*] . Эта функция называется

Перечислим свойства функции *F* (*x*) .

1. Функция верхнего предела

*F* (*x*)

определена на отрезке [*a*, *b*], причем

*a*

*F* (*a*)  ∫ *f* (*t*)*dt*  0 ,

*a*

*b*

*F* (*b*)  ∫ *f* (*t*)*dt* .

*a*

1. Функция верхнего предела *F* (*x*) непрерывна на отрезке [*a*, *b*].

В самом деле, найдем приращение функции верхнего предела

*x**x x*

*F* (*x*)  *F* (*x*  *x*)  *F* (*x*)  ∫ *f* (*t*)*dt*  ∫ *f* (*t*)*dt* 

*a a*

*a x**x x**x*

 ∫ *f* (*t*)*dt*  ∫ *f* (*t*)*dt*  ∫ *f* (*t*)*dt*.

*x a x*

Так как функция

*f* (*t*)

интегрируема на [*a*, *b*], то

*f* (*t*)

ограничена на этом отрезке, т.е.

*M* *t* [*a*, *b*]

*f* (*t*)  *M* . Тогда

*x**x x**x x**x*

*F* 

∫ *f* (*t*)*dt*  ∫ *f* (*t*) *dt*  ∫ *Mdt* 

*x x x*

*x**x n*1

*n*1

 *M* ∫ *dt*  *M* lim ∑ *xi*  *M* lim ∑  *xi* 1  *xi*  

*x* max *xi* 0 *i*0 max *xi* 0 *i*0

 *M*  *x*  *x*  *x*  *M* *x*.

Переходя к пределу при

*F* (*x*) непрерывна.

*x*  0 , получаем

lim

*x*0

*F*  0 , а это означает, что функция

1. Если функция

*f* (*t*)

непрерывна на отрезке [*a*, *b*], то функция верхнего предела

*F* (*x*)

дифференцируема на [*a*, *b*], причем

*F* (*x*) 

*f* (*x*) , т.е.

*F* (*x*)

является первообразной

для функции

*f* (*x*) .

В самом деле, покажем, что

lim

*F* 

*f* (*x*)

или

lim

 *F*

 , где

*x* [*a*, *b*] . Для этого оценим разность

 

*x*0 *x*

*F*  *f* (*x*) . Имеем

*x*

*x*0  *x*  *f* (*x*)   0

 *f* (*x*) 

*F*

*x*

*x**x*

# ∫

1

*x*

*x*

*f* (*t*)*dt*  1 *f* (*x*)*x* 

*x*

*x**x*

1

*x*

 ∫

*f* (*t*)*dt*  1

*x*

*x**x*

# ∫

*f* (*x*)*dt*

*x**x*

 1

∫

*x*

*f* (*t*)  *f* (*x*) *dt*.

*x x x*

При этом мы использовали равенство определенного интеграла:

*x**x*

*x*  ∫

*x*

*dt* , которое получается из определения

*x**x n*1

*n*1

∫ *dt*  lim ∑ *xi*  lim ∑  *xi*1  *xi*   *xn*  *x*0  (*x*  *x*)  *x*  *x*.

*x* max *xi* 0 *i*0 max *xi* 0 *i*0

Так как функция

*f* (*t*)

непрерывна в точке

*x* [*a*, *b*] , то для любого

  0

найдется  ,

такое, что если

*x*   , то

*f* (*x*) 

*f* (*x*  *x*)  *f* (*x*)   . Но тогда

*f* (*t*)  *f* (*x*)   для

любого *t* [*x*, *x*  *x*]. Поэтому

 *f* (*x*)  1

*F*

*x*

*x*

*x**x*

# ∫

*dt*  1 

*x*

*x**x*

# ∫

*dt*  1 *x*  .

*x*

*x x*

Это означает, что

lim

 *F*

 или

*F* (*x*) 

*f* (*x*) .

*x*0  *x*  *f* (*x*)   0

 

1. Формула Ньютона**-**Лейбница

Теорема **6.** Пусть функция

*f* (*x*)

непрерывна на отрезке [*a*, *b*]

и (*x*) –

некоторая (любая) ее первообразная, тогда справедлива формула Ньютона*-*Лейбница:

*b*

∫ *f* (*x*)*dx*  (*x*) *b*  (*b*)  (*a*)

*a*

(5)

*a*

Это теорема является центральной теоремой интегрального исчисления.

Первообразная

(*x*)

вычисляется путем нахождения неопределенного интеграла от

функции

*f* (*x*) :

∫ *f* (*x*)*dx*  (*x*)  *C* . Таким образом, вычисление определенного

интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла, или первообразной, и простой подстановке пределов интегрирования.

*x*

Доказательство**.** Пусть *F* (*x*)  ∫ *f* (*t*)*dt* – функция верхнего предела. Тогда *F* (*x*) и

*a*

(*x*)

– две первообразные одной и той же функции

*f* (*x*) . В этом случае справедливо

равенство

*F* (*x*)  (*x*)  *C*

или

*F* (*x*)  (*x*)  *C* , где *C*  *const* . Тогда

*x*

∫ *f* (*t*)*dt*  (*x*)  *C* . (6)

*a*

Подставим в равенство (6) *x*  *a* . Получим

*a*

∫ *f* (*t*)*dt*  (*a*)  *C*

*a*

или

(*a*)  *C*  0 . Отсюда

находим *C*  (*a*) . Тогда равенство (6) примет вид

*x*

∫ *f* (*t*)*dt*  (*x*)  (*a*) .

*a*

Подставим теперь в последнее равенство *x*  *b* . Получим формулу (5).

Замечание**.** Отметим еще раз, что формула Ньютона-Лейбница применима только

в том случае, если функция

1 *dx*

*f* (*x*)

непрерывна на отрезке [*a*, *b*]. Например, при

1

вычислении интеграла ∫ *x*

1

формулу (1) применять нельзя, так как функция

*f* (*x*) 

*x*

разрывна в точке *x*  0 [1,1] .

1. Методы вычисления определенного интеграла

Методы вычисления определенного интеграла аналогичны методам вычисления неопределенного интеграла.

1. Замена переменной интегрирования.

Пусть функция

*f* (*x*)

непрерывна на отрезке [*a*, *b*], а функция

*x*  (*t*)

непрерывна на отрезке [,] , причем Тогда справедлива формула

*a*  (), *b*  ()

и *t* [,]

*a*  (*t*)  *b* .

*b* 

∫ *f* (*x*)*dx*  ∫ *f* (*t*)(*t*)*dt*

*a* 

1. Формула интегрирования по частям.

Если функции формула

*u*  *u*(*x*)

и *v*  *v*(*x*)

непрерывны на отрезке [*a*, *b*], то справедлива

*b b*

∫ *udv*  *uv b*  ∫ *vdu*

*a*

*a a*

Примеры**.**

*e* ln2 *x*

1. Вычислить интеграл

*I*  ∫

1

*dx* .

*x*

Положим ln *x*  *t* , тогда *dx*  *dt* . Если

*x*

*x*  1 , то

*t*  0 . Если *x*  *e* , то

*t*  1.

Следовательно,

1 2 1 3 1 1

*I*  ∫ *t dt*  3 *t* 0  3 .

0

1. Вычислить интеграл

 3

*I*  ∫

0

 *x* sin *xdx* . cos2 *x*

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим

*u*  *x*

*dv*  sin *x dx*

⇒ *du*  *dx*,

⇒ *v*  ∫ sin *x dx*  ∫ *d* cos *x*  1 .

cos2 *x*

cos2 *x*

cos2 *x*

cos *x*

Отсюда находим

 3  3 *dx* 

*x*

cos *x*

3cos 3

 

∫

 *x*    3

*I*  

0

0

cos *x*   ln *tg*  2  4  0 

 2  ln *tg*  5   ln *tg*     2  ln *tg*  5 .

3  12   4  3

 12 

     

**6.** Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Пусть надо вычислить определенный интеграл от непрерывной функции

*f* (*x*) на

отрезке [*a*, *b*]. Если известна первообразная функции *f* (*x*) , то можно применить

формулу Ньютона-Лейбница. Но мы знаем, что не всегда первообразная существует и тогда возникает задача о приближенном вычислении интеграла.

1. Формула прямоугольников.

Разобьем отрезок [*a*, *b*]

на *n* равных частей. См. рис. 2. Тогда

*x*  *b*  *a* . В

*n*

качестве получим

*i* возьмем точки

*xi*1  *xi* . Тогда по определению определенного интеграла

2

*b*   *x*0  *x*1 

 *x*  *x* 

 *xn*1  *xn* 

∫ *f* (*x*)*dx*  *x*  *f*    *f*  1 2  K *f*   

*a*   2 

 2 

 2 

*b*  *a n*  *xi*1  *xi* 

 ∑ *f*  .

*n i*1  2 

Это и есть квадратурная формула прямоугольников.



Рисунок 2 Рисунок 3

1. Формула трапеций. Разобьем отрезок [*a*, *b*]

на *n* равных частей. Тогда интеграл приближенно будет

равен сумме площадей трапеций, вписанных в криволинейную трапецию. См. рис. 3.

Имеем

*S*  *x*  *f* (*xi*1)  *f* (*xi* ) . Тогда

*i* 2

*b*

∫ *f* (*x*)*dx*  *S*1  *S*2 K *Sn* 

*a*

 *x*  *f* (*x*0 )  *f* (*x*1)  *f* (*x*1)  *f* (*x*2 ) K *f* (*xn*1)  *f* (*xn* )  

 2 2 2 

 

 *x*  *f* (*x*0 )  *f* (*x* )  *f* (*x*

) K *f* (*x*

)  *f* (*xn* )  

 2 1 2 *n*1 2 

 

 *b*  *a*  *f* (*x*0 )  *f* (*xn* )  *f* (*x* ) K *f* (*x* 

*n*  2

1 *n*1) .

 

Последняя формула называется квадратурной формулой трапеций.

Замечание**.** Формулы прямоугольников и трапеций точны для многочленов не выше первой степени, т.е. для линейных функций *y*  *Ax*  *B* . В этом смысле формула трапеций не имеет никакого преимущества перед формулой прямоугольников.

1. Формула парабол. Формула Симпсона.

Рассмотрим на плоскости три точки

*A*(*x*, *y*0 ) ,

*B*(0, *y*1) ,

*C*(*x*, *y*2 ) . Известно,

что через три точки на плоскости можно провести единственную параболу *y*  *ax*2  *bx*  *c* . Поскольку точки А, В и С лежат на параболе, то должны выполняться равенства

*y*0  *a* *x*2  *b**x*  *c*,

*y*1  *c* ,

*y*2  *a* *x*2  *b**x*  *c* .

Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой параболой на отрезке [*x*, *x*] .

*x*

*S*  ∫

*ax*2  *bx*  *c**dx*   *a x*  *b x*

 *x*

* *cx*  

*x*



3

2

 3 2

 *x*

 *x* 2*a* *x*2  6*c*  *x*  *y*  4 *y*  *y* .

3 3 0 1 2

Полученная формула

*S*  *x*  *y*  4 *y*  *y* 

называется формулой Симпсона.

3 0 1 2

Из этой формулы, перейдя от отрезка [*x*, *x*]

квадратурная формула парабол:

к отрезку [*a*, *b*], получается

*b b*  *a* 

 *a*  *b*  

∫ *f* (*x*)*dx*  6  *f* (*a*)  4 *f*  2   *f* (*b*)  .

*a*    

Отметим, что эта формула точна для многочленов третьей степени.

Разделим теперь отрезок [*a*, *b*]

на четное число равных частей. Тогда

*x*  *b*  *a* ,

2*n*

а интеграл можно приближенно вычислить следующим образом:

*b*

∫ *f* (*x*)*dx*  *S*1  *S*2 K *Sn* .

*a*

Из формулы Симпсона имеем:

*S*  *x*  *y*  4 *y*  *y*  ,

1 3 0 1 2

*S*  *x*  *y*  4 *y*  *y*  ,

2 3 2 3 4

………

*S*  *x*  *y*  4 *y*  *y*  .

*n* 3 2*n*2 2*n*1 2*n*

Тогда получаем обобщенную квадратурную формулу парабол:

*b*

∫ *f* (*x*)*dx* 

*a*

*b*  *a*

6*n*

 *y*0  4 *y*1  2 *y*2  4 *y*3  2 *y*4 K *y*2*n*  .