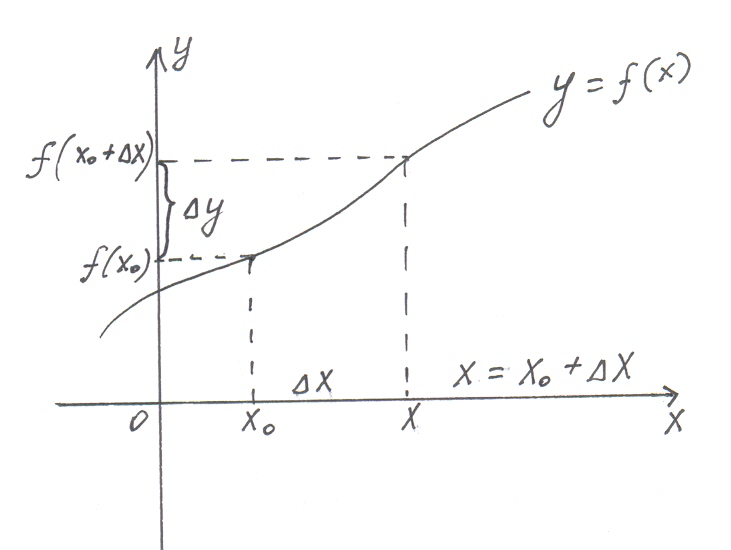
**Производная и ее применение**

Начиная изучать раздел «Производная и ее применение». Определение сложному понятию производная мы будем давать на основании понятия более простого «Приращение функции».

**Тема 1. Приращение функции**

Пусть нам дана какая- то функция y=f(x).

Проведем произвольную кривую линию и будем считать, что это график нашей функции.



Возьмем на оси ОХ первоначальное значение аргумент обозначим его Хо. Найдем графически соответствующее ему значение функции y0= f ( x0) .

Возьмем на оси ОХ новое значение аргумента, обозначим его x. Разность между новым значением аргумента x и первоначальным x0 – это и есть приращение аргумента ∆x (дельта x).

Определение. Разность между новым значением аргумента и первоначальным называются **приращение аргумента**

∆х = х – х0 – приращение аргумента ( дельта икс равно икс минус икс нулевое).

Из этого равенства следует, что

x= x0+∆x

Найдем графически значение функции в точке x, то есть в точке x0+ ∆x.

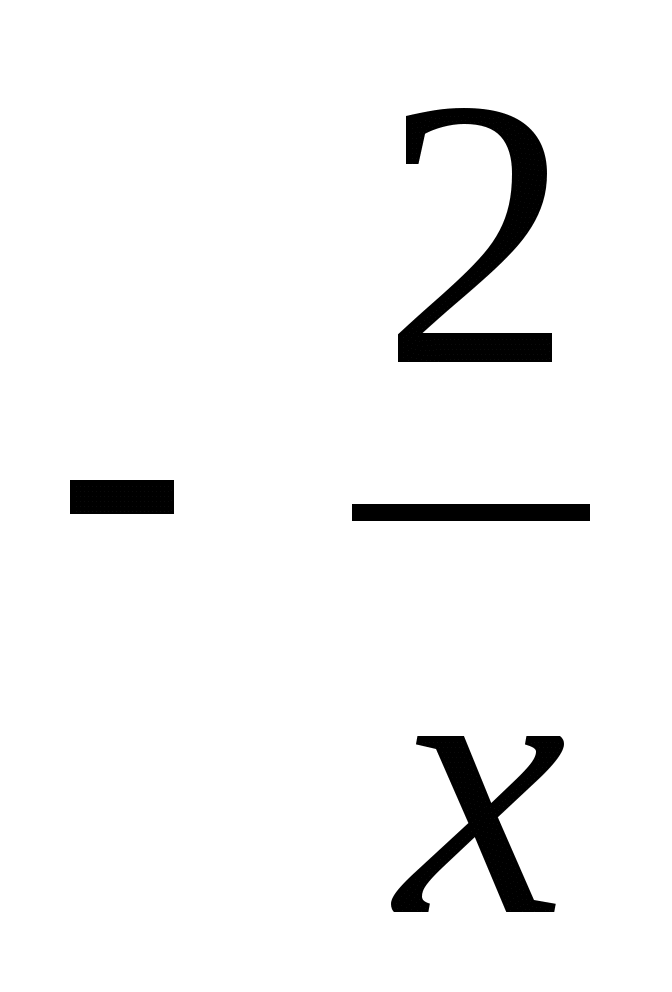
Определение. Разность между новым значением функции и первоначальным называется **приращением функции.**

Записывается так: ∆f = f ( x0+∆x) – f ( x0).

f(x0+ ∆x) – новое значение функции (эф от икс нулевое плюс дельта икс).

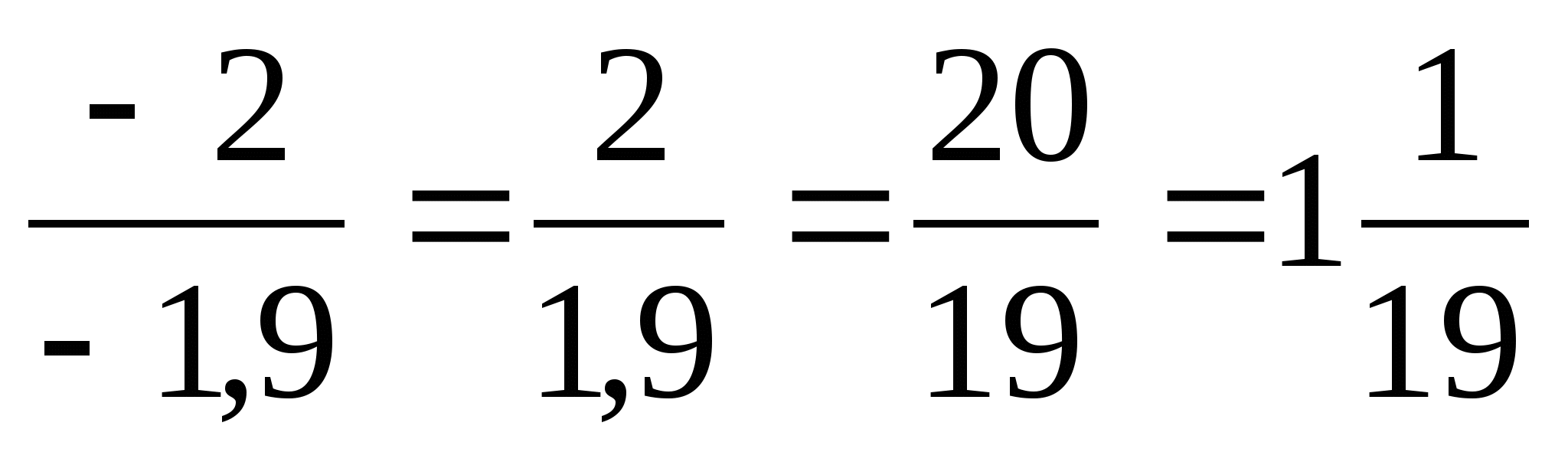
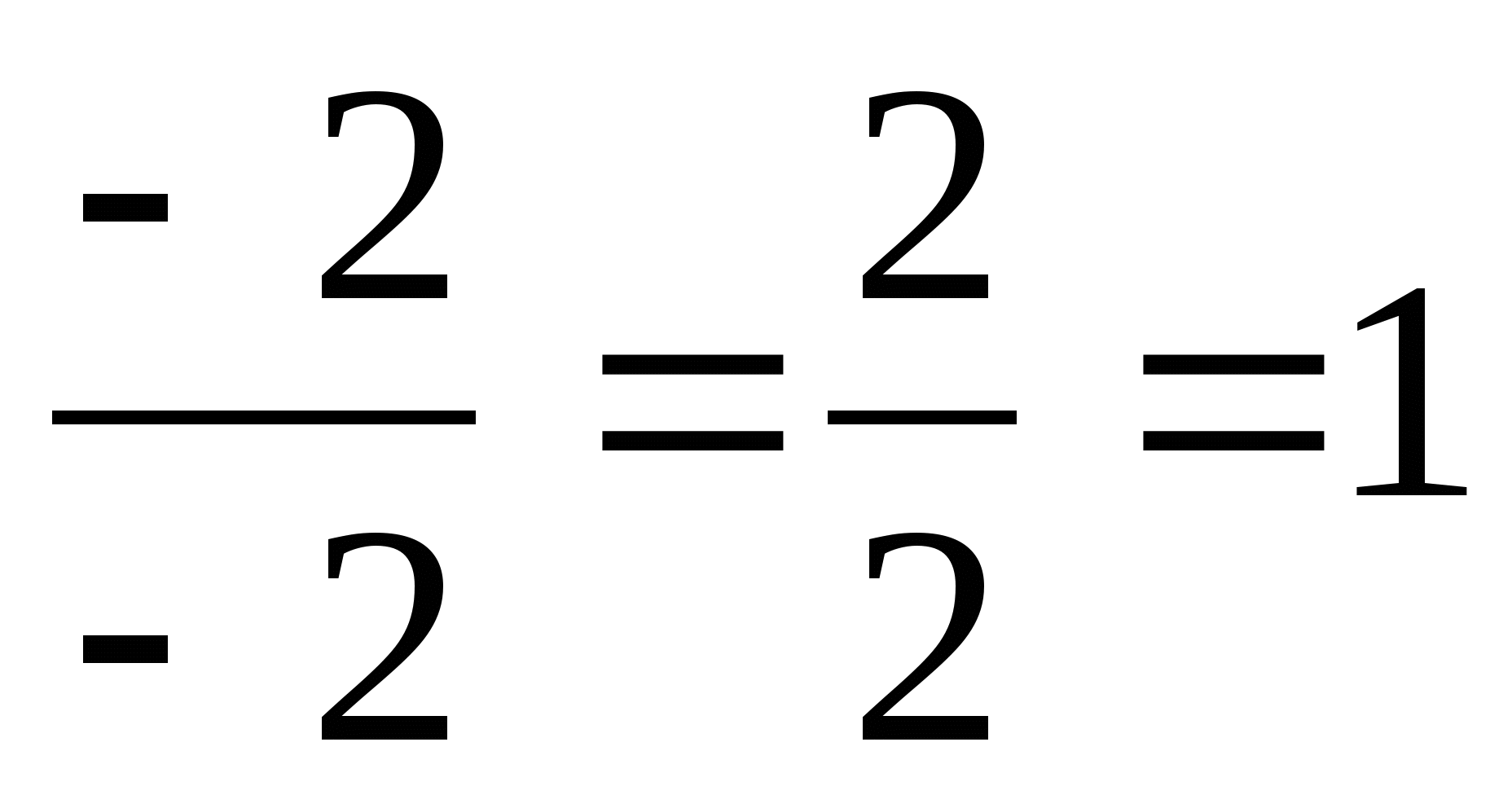
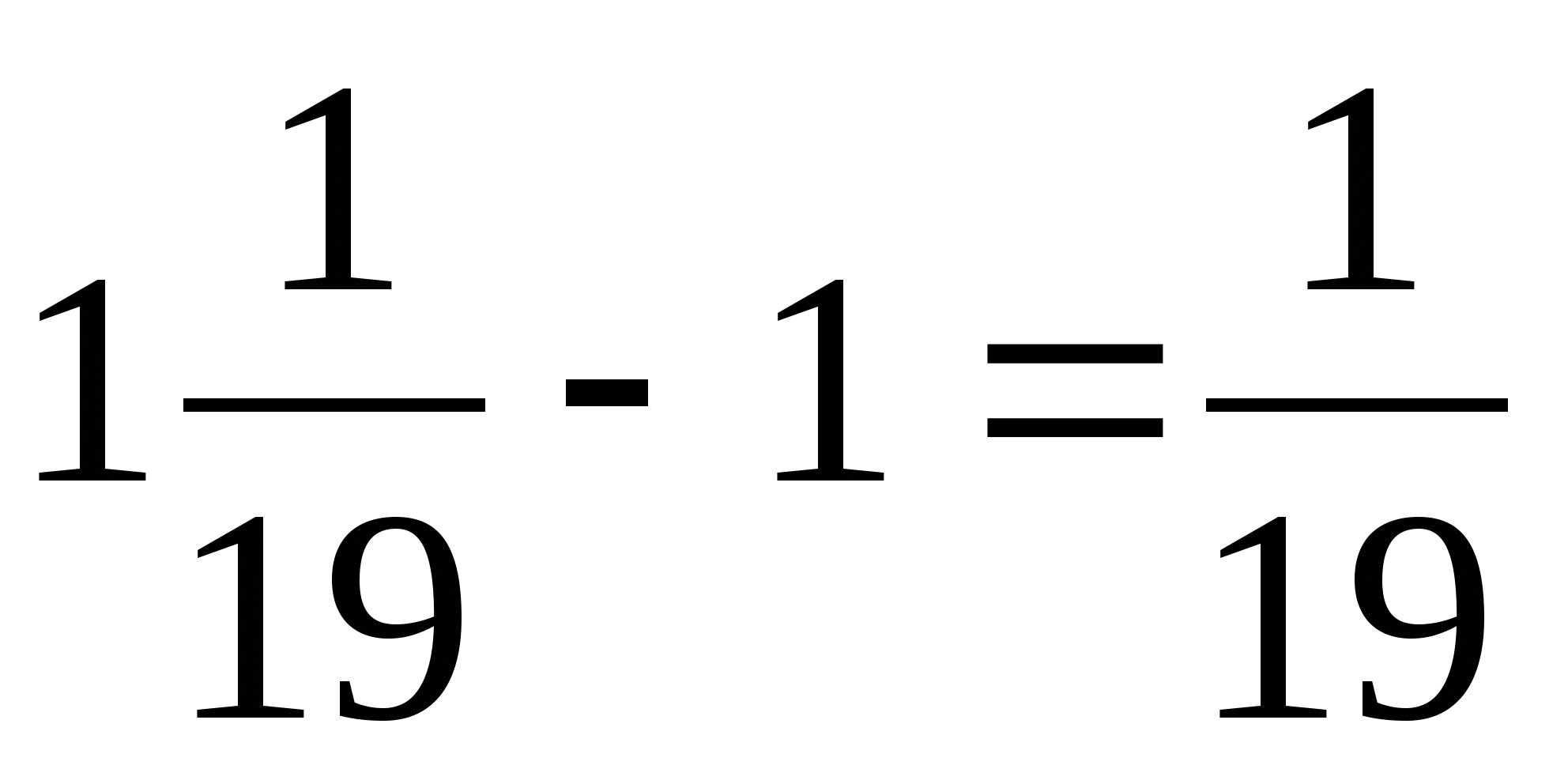
f ( x0) – первоначальное значение функции.

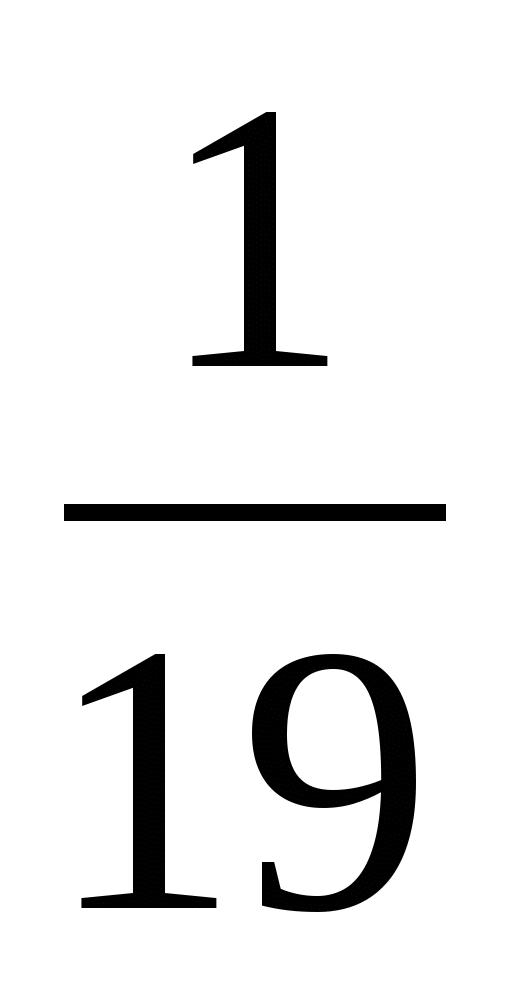
∆f – приращение к функции (дельта эф).

**Пример №1**. Дано: f(x)=; X0= -2; ∆X= 0.1

Найти приращение функции f в точке X0, т.е. ∆f.

**Решение**:

1. Формула ∆f = f(x0+ ∆x) – f (x0)
2. X0+ ∆X= -2+0.1=-1.9
3. f(x0+∆x)=f(-1.9)= 
4. f(x0)=f(-2)= 
5. ∆f= ;

Ответ: ;

**Пример №2**. Дано: f(x)=3x+1; x0=5;∆x=0.001.

Найти: ∆f

**Решение:**

1. формула ∆f = f ( x0+∆x)-f(x0)
2. x0+∆x= 5+0.001=5.001;
3. f(x0+∆x)=f(5.001)=3\*5.001+1=15.003+1=16.003;
4. f(x0)=f(5)=3\*5+1=16
5. ∆f=16.003-16=0.003

Ответ: 0,003.

**Тема 2. Определение производной**

Определение. **Аргумент**- это независимая переменная величина (х).

Определение. **Функция** - это зависимая переменная величина (у).

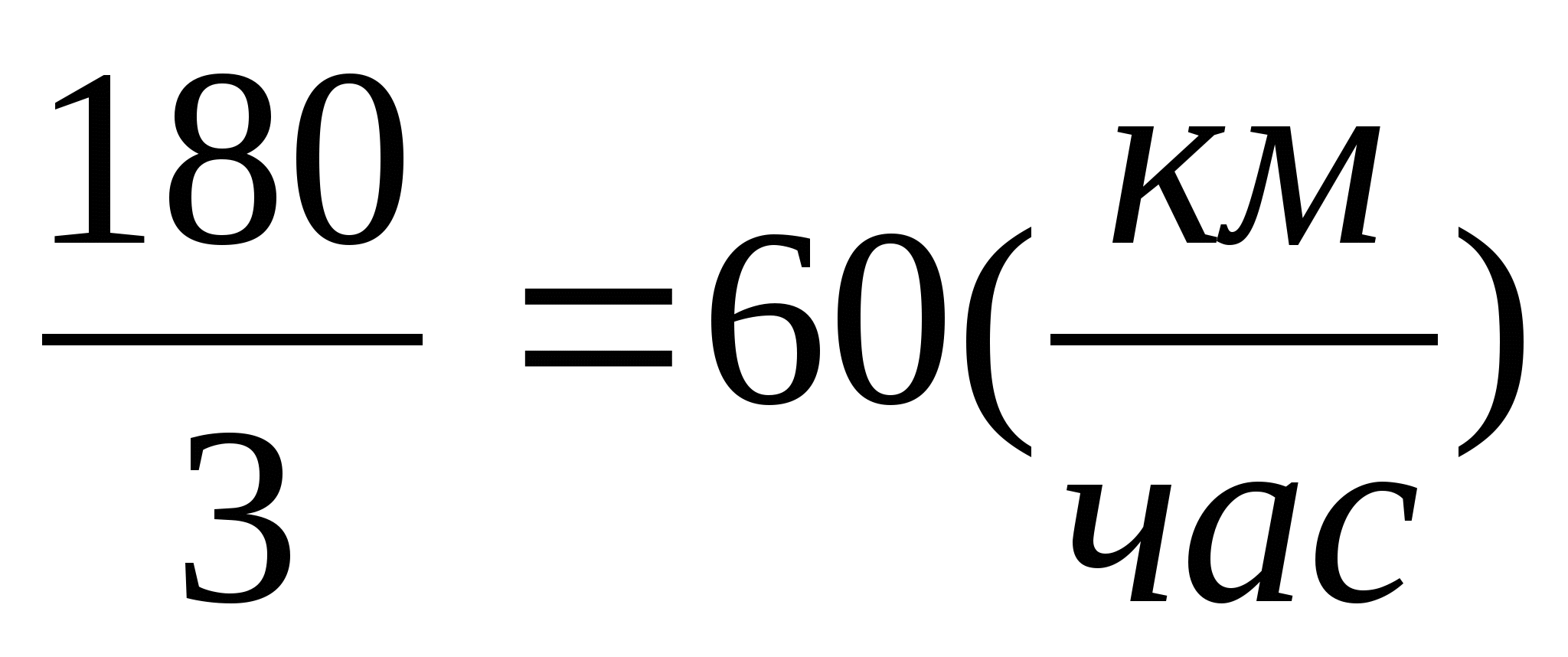
Пример. Движение характеризуют переменные величины: t–время, S- расстояние, V-скорость.

t- время – это независимая величина, для математики – это аргумент.

S – расстояние- это зависимая переменная величина, для математики – это функция.

V- скорость при движении может быть переменной и может быть постоянной величиной.

Рассмотрим пример движения поезда. Например, поезд идет из Владивостока в Москву. Мы решили определить его скорость. Сели в Красноярске, вышли в Ачинске и говорим, что расстояние 180км мы проехали за 3 часа.

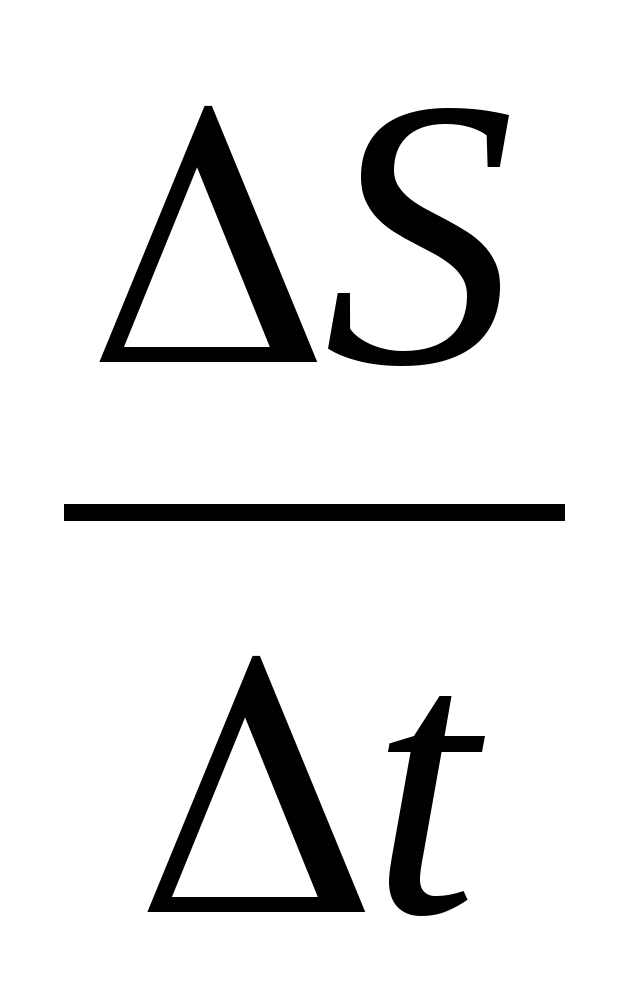
Получается, что скорость поезда V= 

Но на этом пути было несколько остановок, когда на прямолинейном участке пути она была и 80 и 90 км/час в близи вокзалов при остановке и при отправлении была разной: и 1и 2, и 5 и 10 ( км/час). А мы говорим, что скорость поезда 60(км/час)

- О какой скорости идет речь?

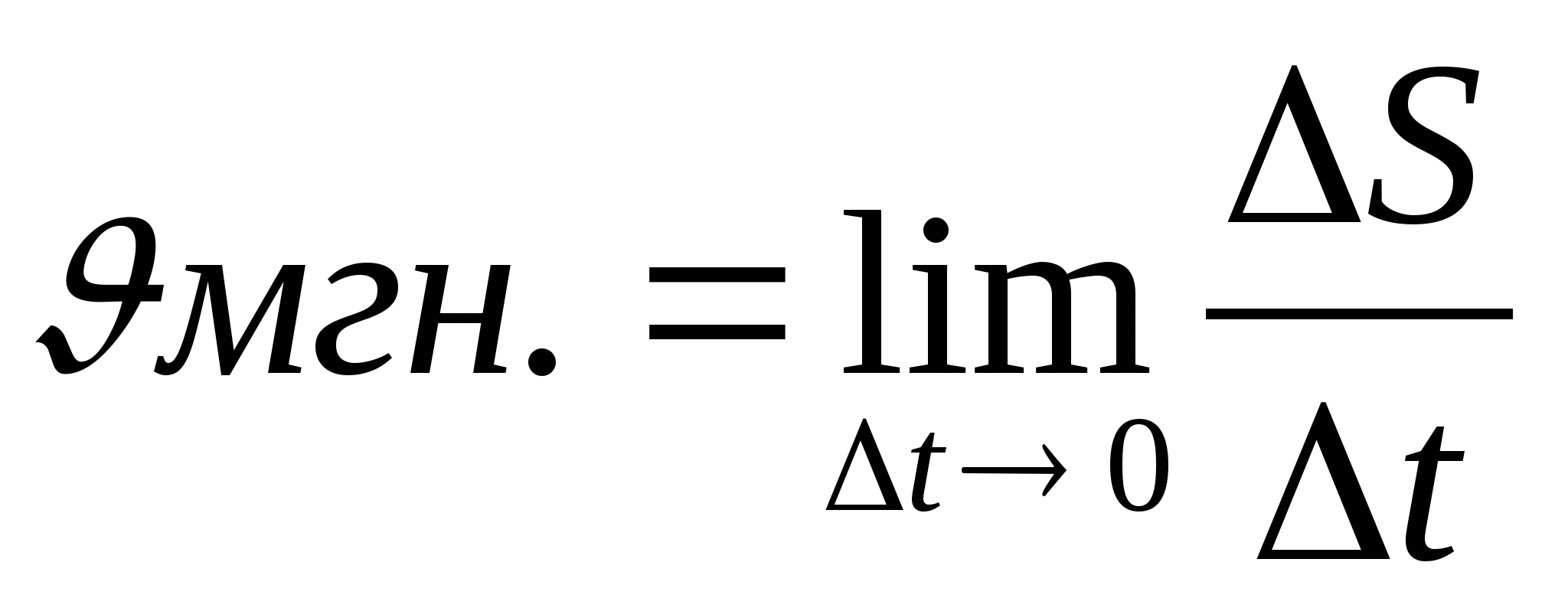
Мы говорим о средней скорости:

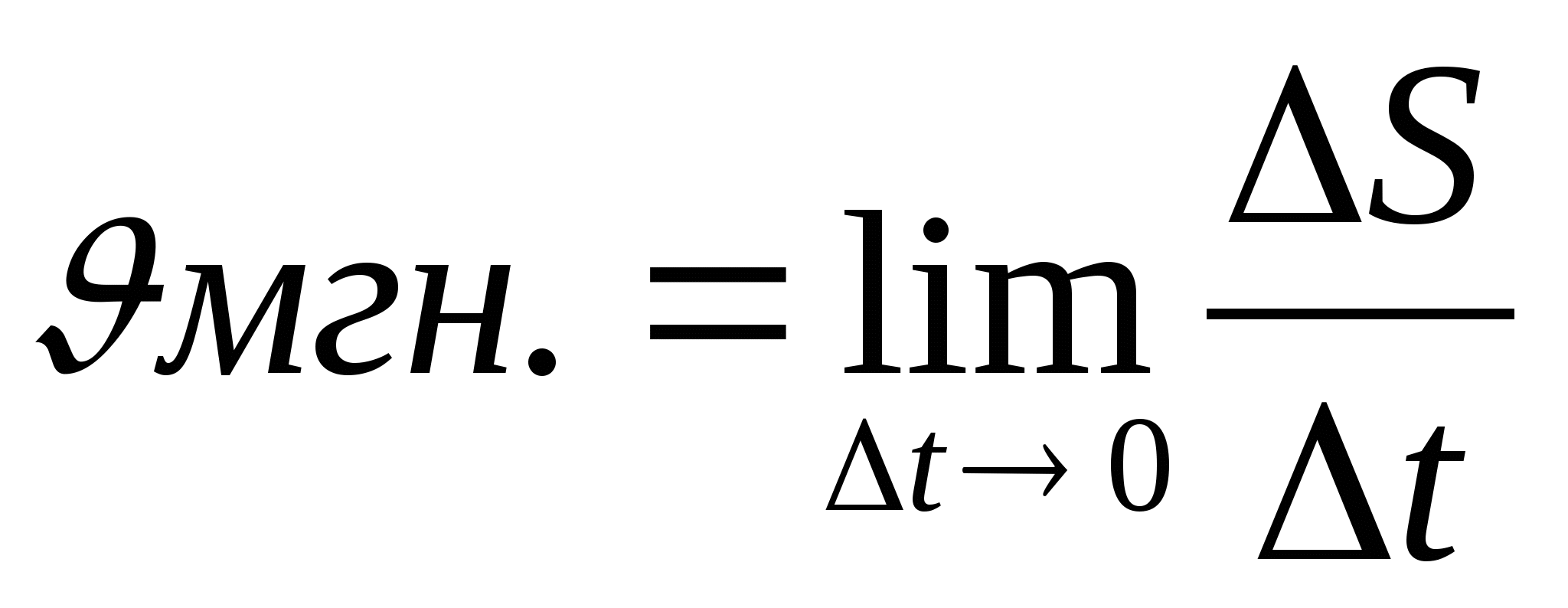
- То есть, чтобы найти среднюю скорость, надо отрезок пути разделить на соответствующий отрезок времени.

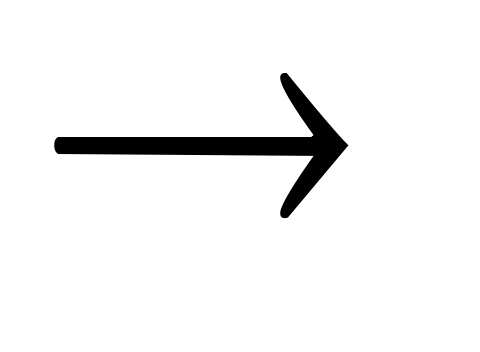
Vср.= 

- А теперь вспомним: какая скорость называется мгновенной?

- **Мгновенная скорость** – это средняя скорость за очень маленький промежуток времени, близкий к нулю.

Т.е.  .

А теперь введем в формулу мгновенной скорости 

∆t 0 математические обозначения.

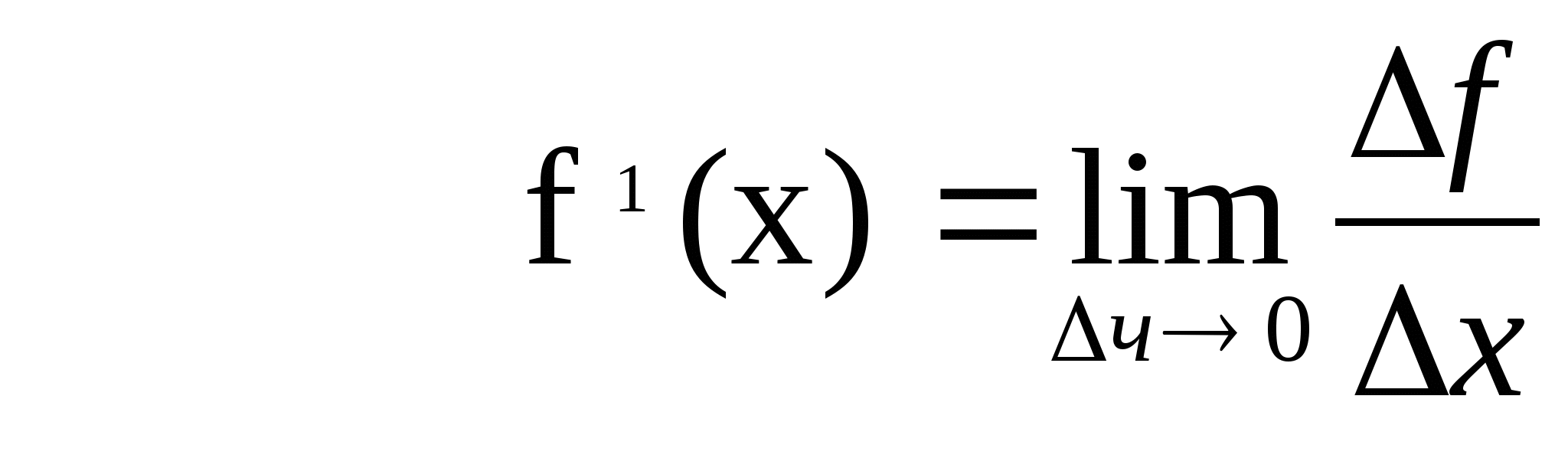
Т.к. расстояние S для математики- это функция, то обозначим отрезок пути вместо ∆S знаком ∆у.

Т.к. время t для математики аргумент, то отрезок времени Δt обозначим за Δх.

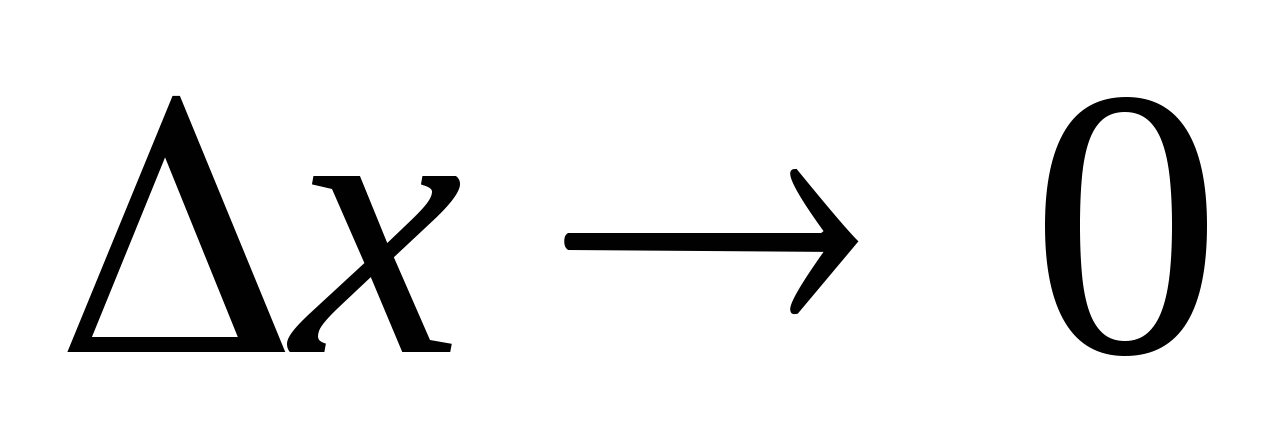
- А чем же для математики является мгновенная скорость?

- Скорость для математики является производной и обозначается у’ или f’(х). ( читается игрек штрих или эф штрих от икс).

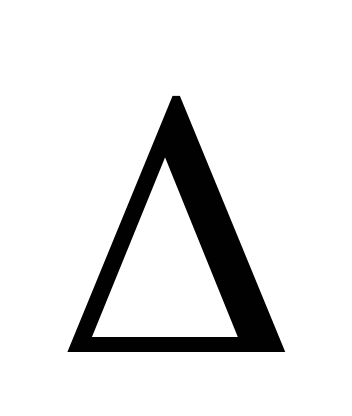
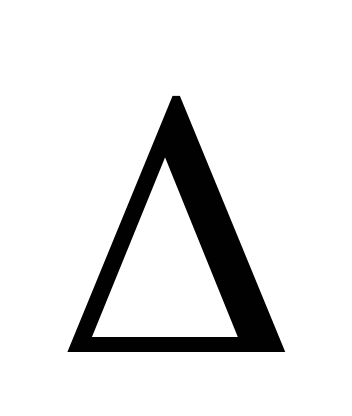
- Итак, формулу мгновенной скорости мы теперь можем записать в математическом виде:



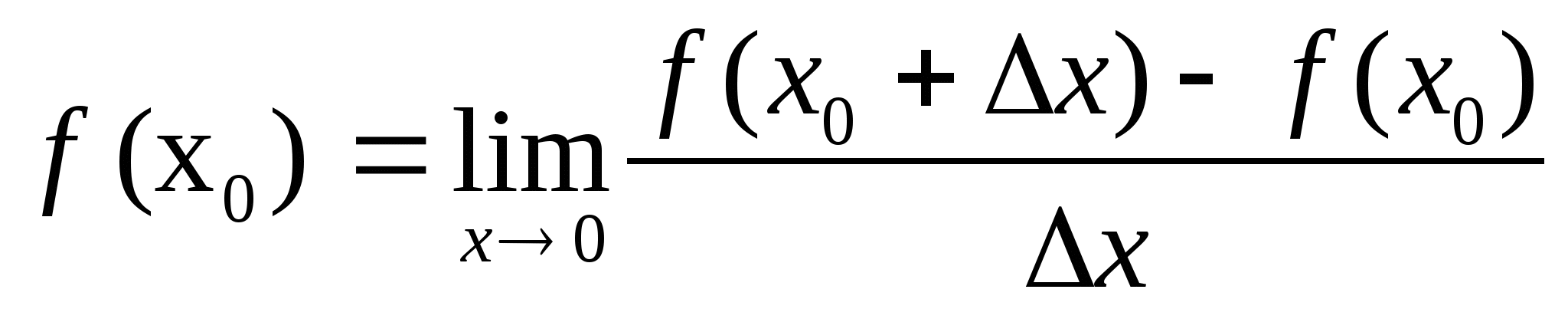
Это и есть формула производной.

Отрезок  можно считать точкой.

Определение. **Производной функции f в точке x0**называется отношение приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

На приращение функции f = f(x0)+x ) – f(x0),

Поэтому формулу производной можем записать в виде :

 (\*)

Т.к. формулу производной функции мы получим из формулы скорости, то можно сказать, что:

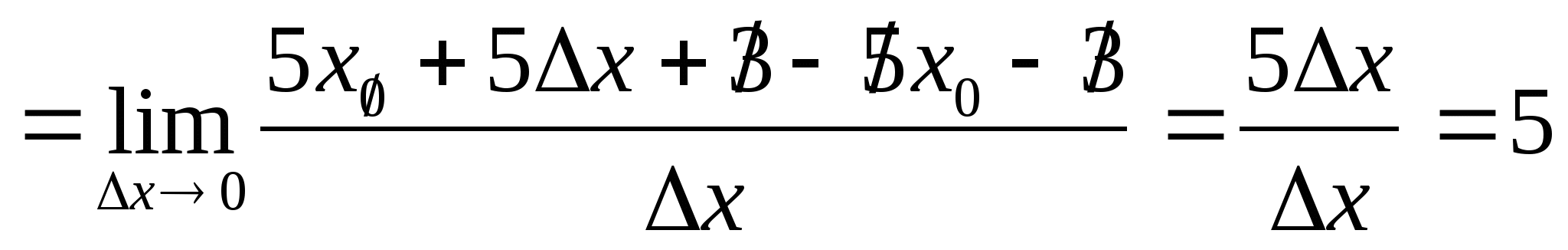
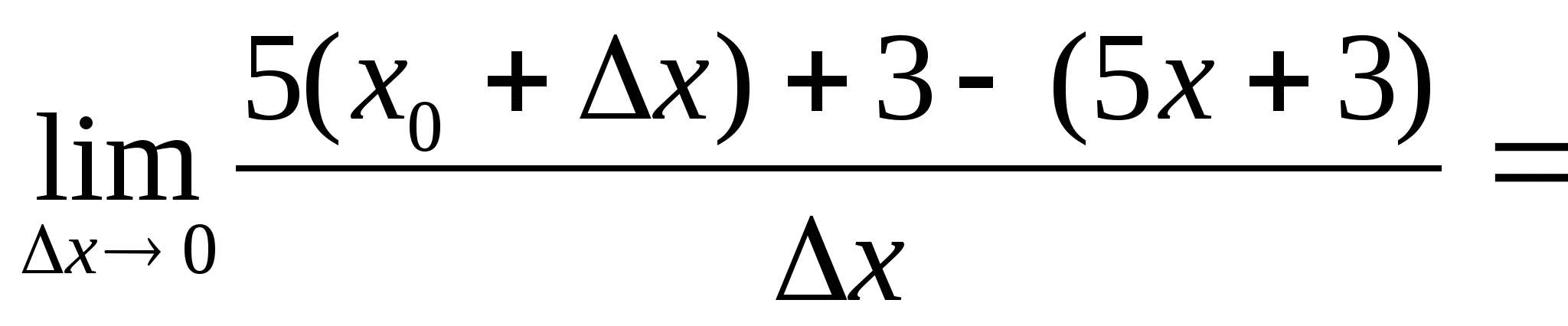
**Физический смысл производной - это скорость изменения функции**

**Пример 1**. Дана функция f(x)= 5x+3

Найти производную fэ(x0).

**Решение**.

Для решения данного упражнения будем пользоваться формулой(\*).

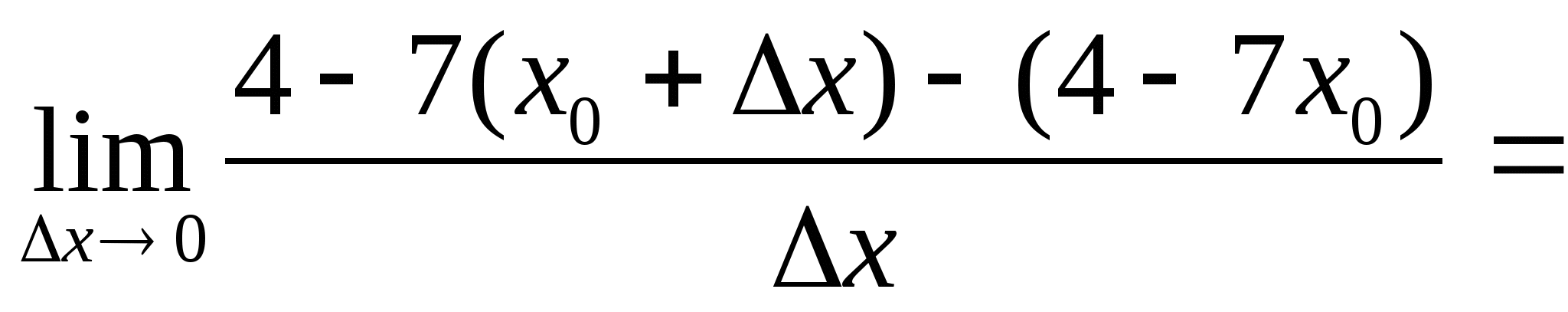
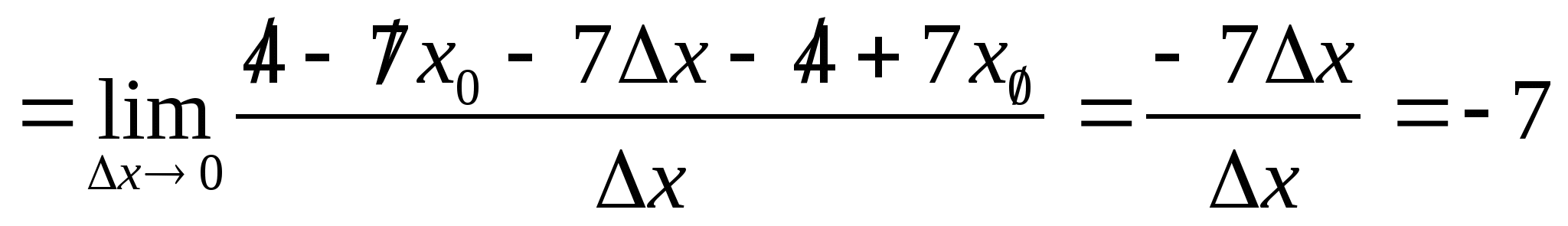
fэ(x0)=

Ответ: (5х+3)’= 5

**Пример 2**. Дана функция f(x)=4-7x

Найти производную f’(x0).

**Решение**

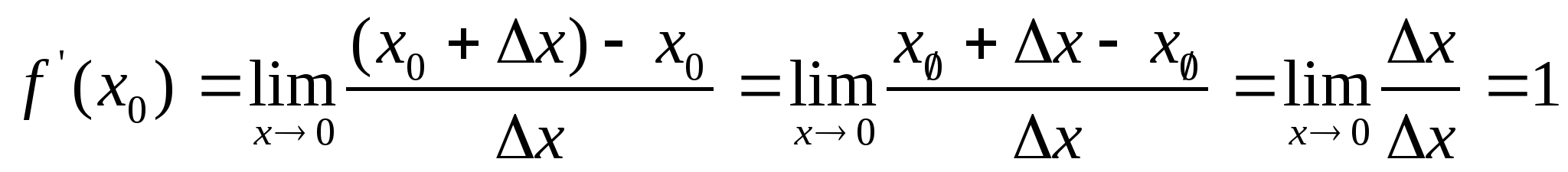
f’(x0)= ****

Ответ: (4-7х) ’= -7

**Пример 3**. Дана функция f(x)=x

Найти производную f’(x0)

**Решение:** 



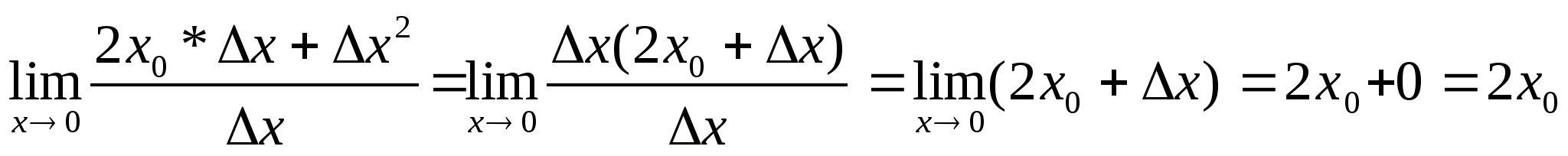
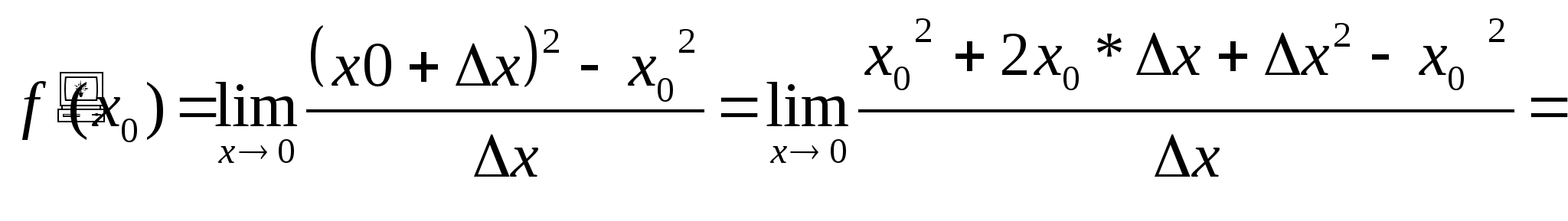
Ответ: х’=1.

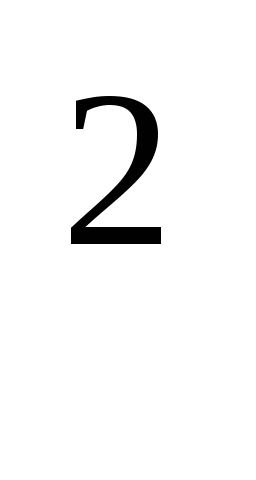
Получим формулу х’=1- производная икса равна единице.

**Пример 4**. Дана функция f(x)=X2

Найти производную f1(x).

**Решение:** Для решения этого упражнения нам будет нужна формула квадрат суммы двух чисел, имеющая вид: (а+в)2= а2+2ав+в2



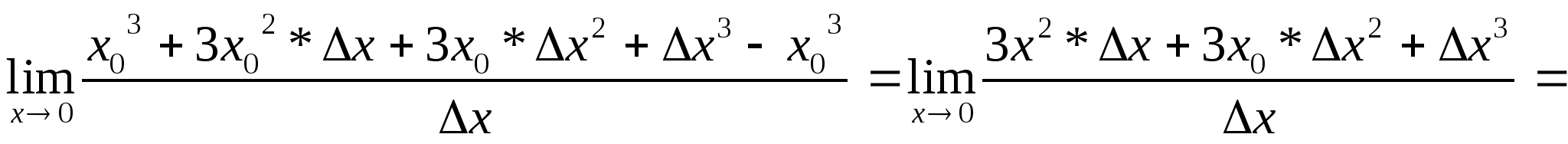
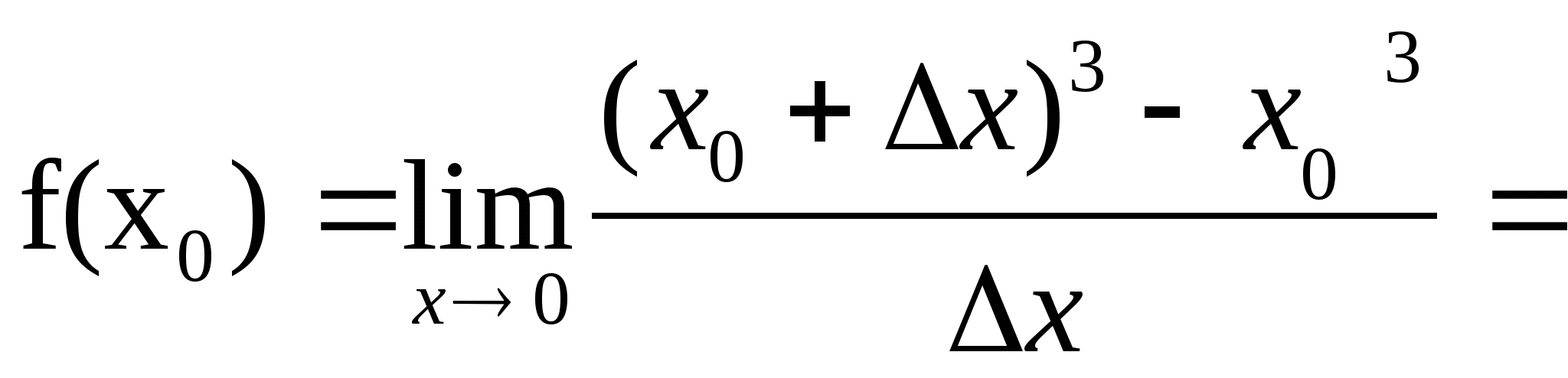
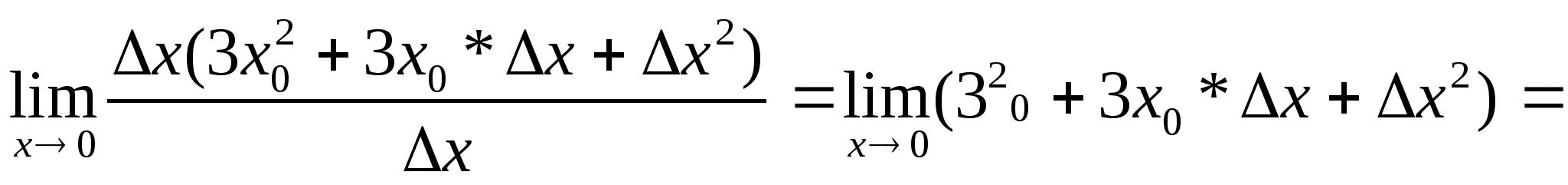
Т.к для обозначения первоначального значения аргумента мы сами ввели индекс нулевое, то можем записать ответ так: (х)’= 2х

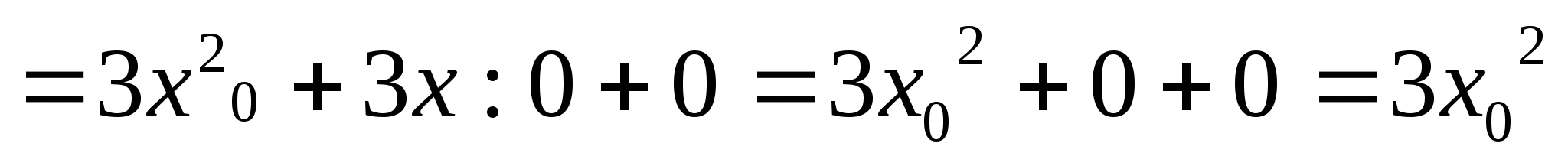
**Пример 5**. Дана функция f (х)= х3.

Найти производную f 1 (х0 ).

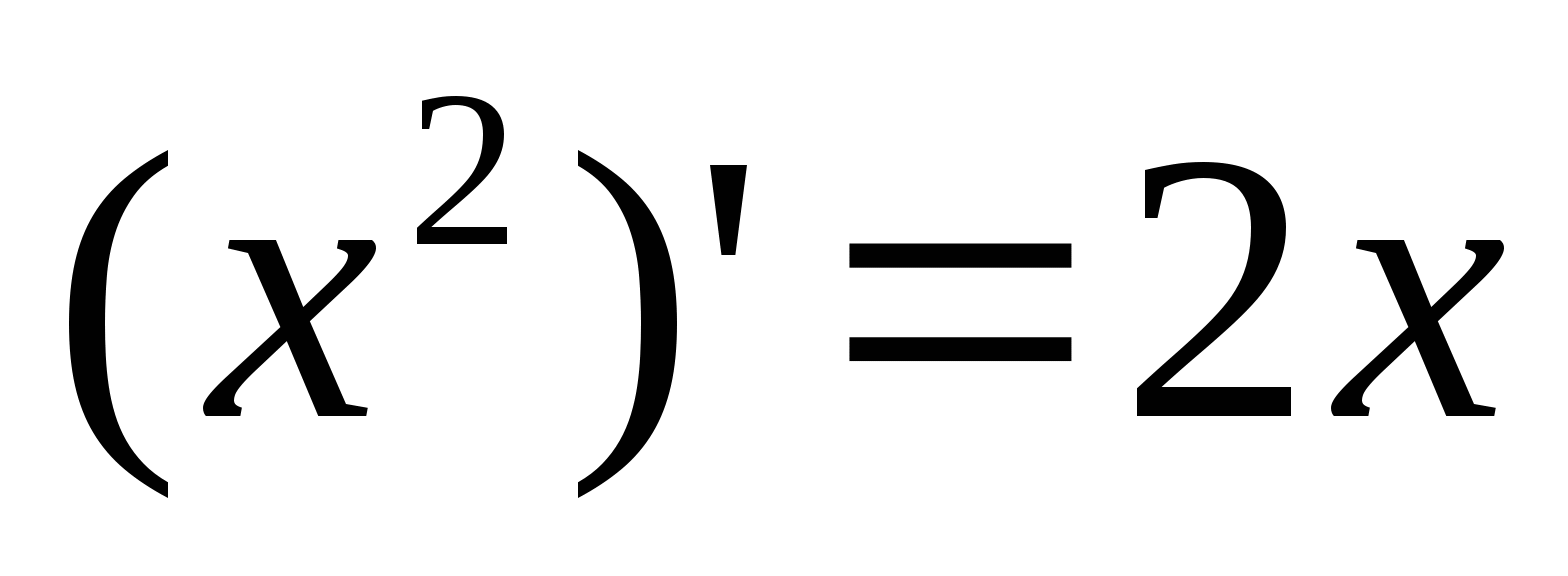
**Решение:** Для решения этого упражнения будем применять формулу куб суммы двух чисел, которая имеет вид:

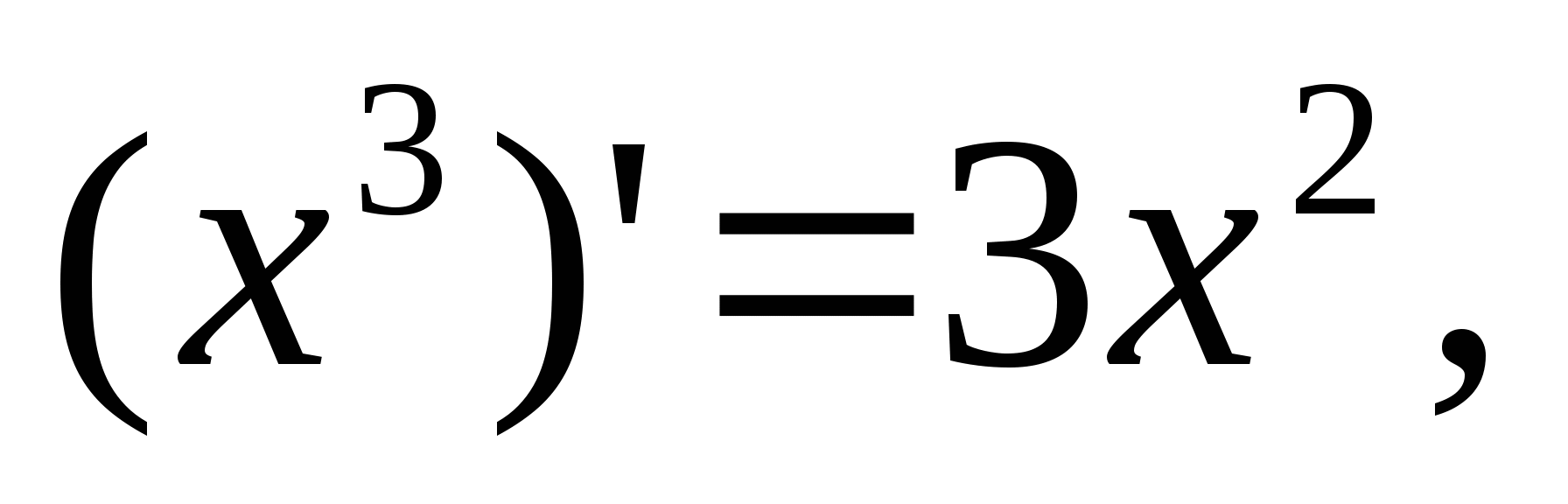
( а + в)3= а3+ 3а2 в + 3ав2 + в3

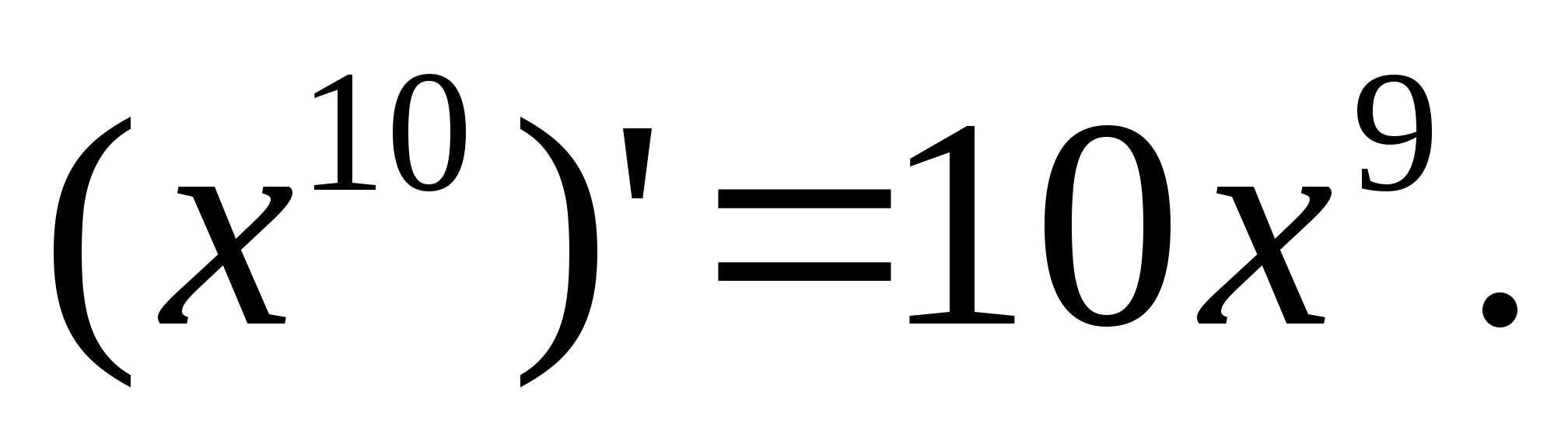
 



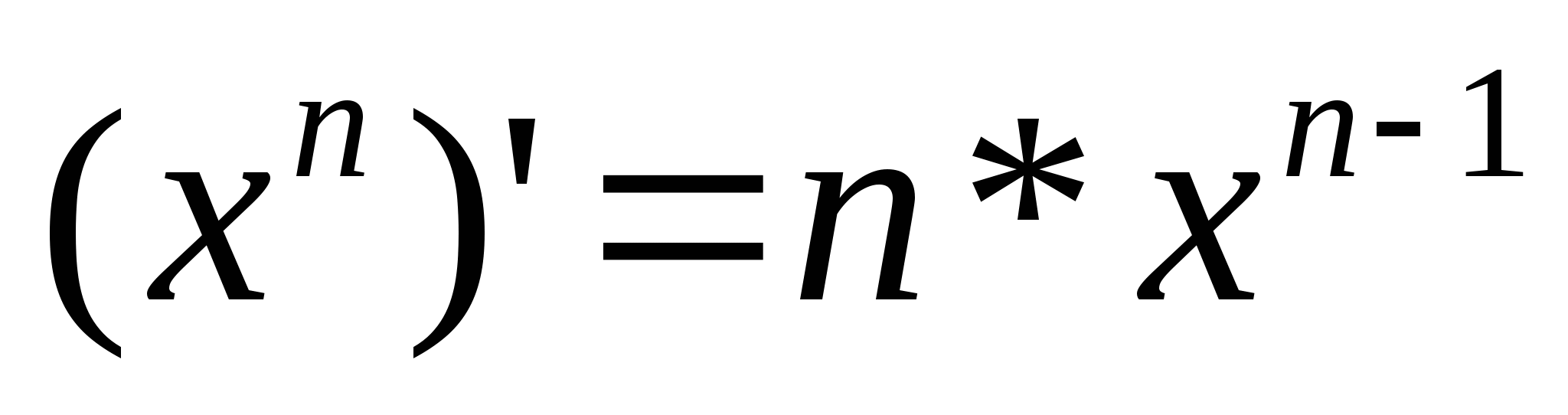
Рассмотрев последние два примера



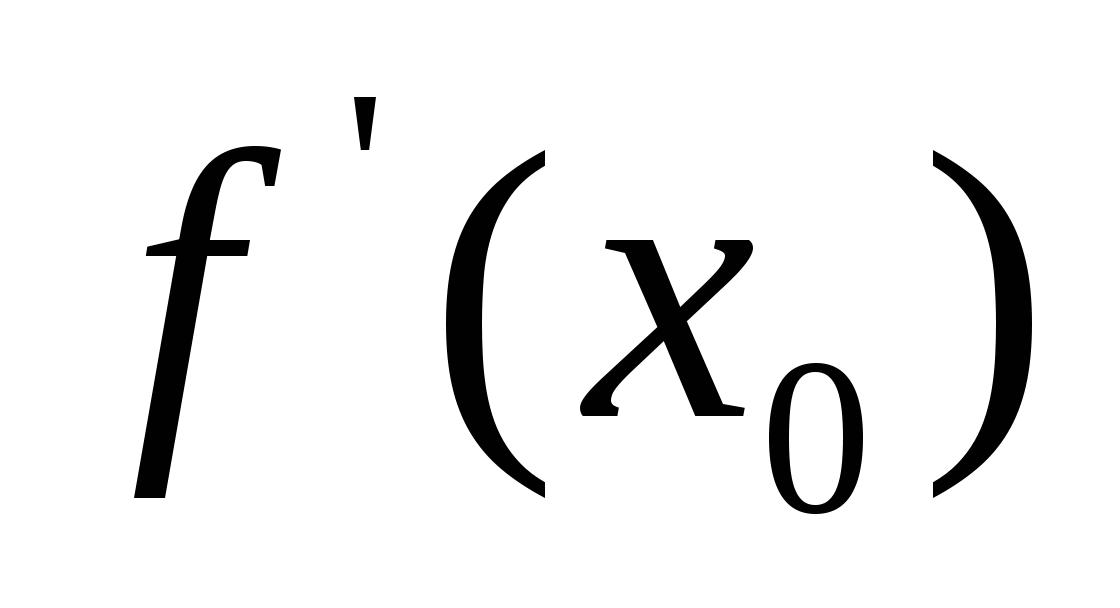
можно по аналогии записать, что

или, например, 

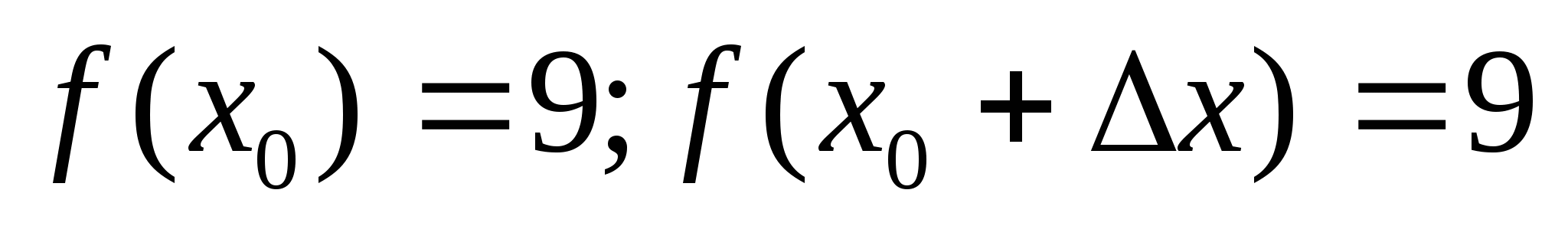
Итак, можно сделать вывод, что производная степенной функции в общем виде записывается так:

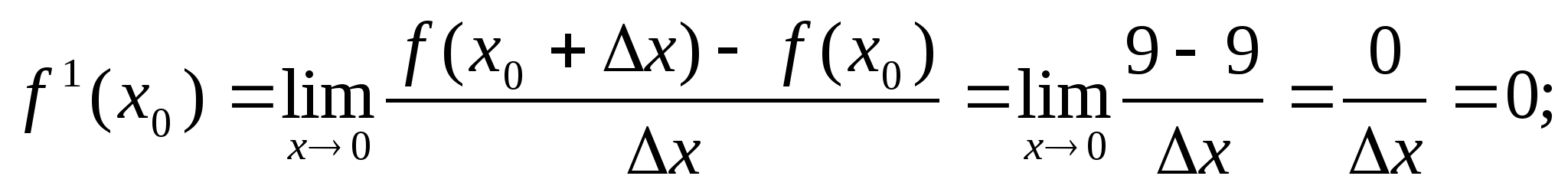


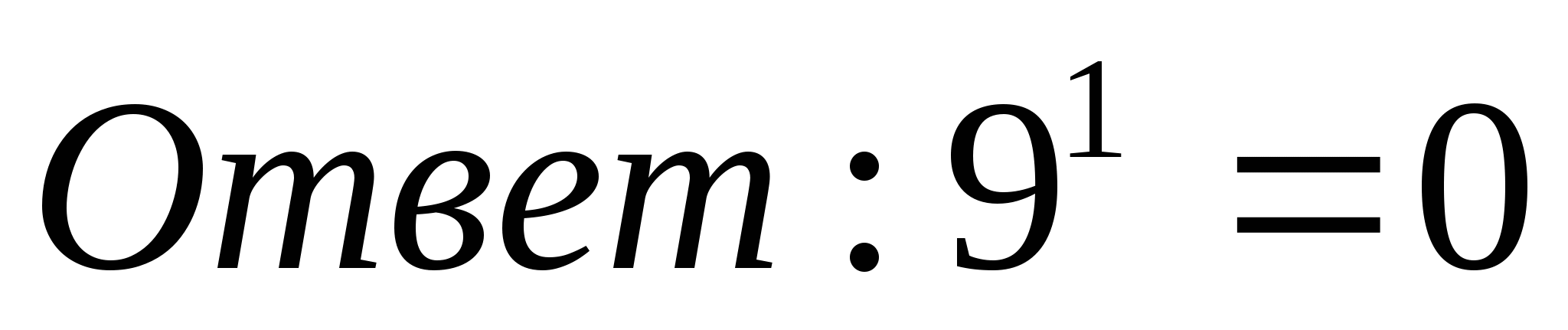
**Пример 6.** Дана функция f(x)=9

Найти производную 

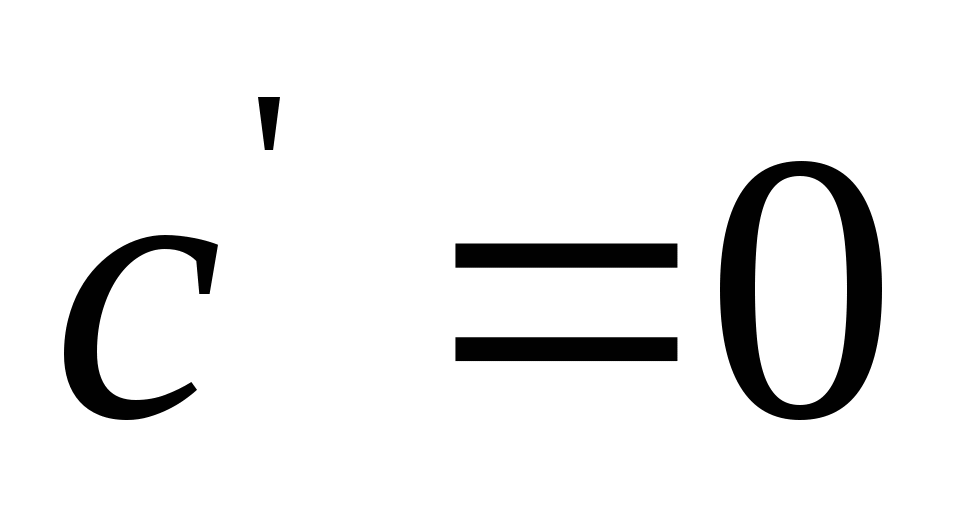
**Решение**.



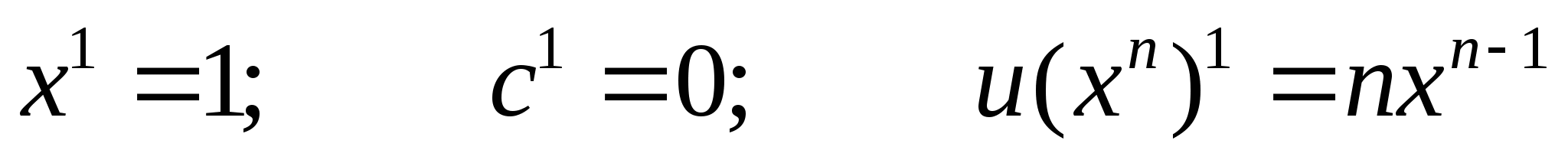




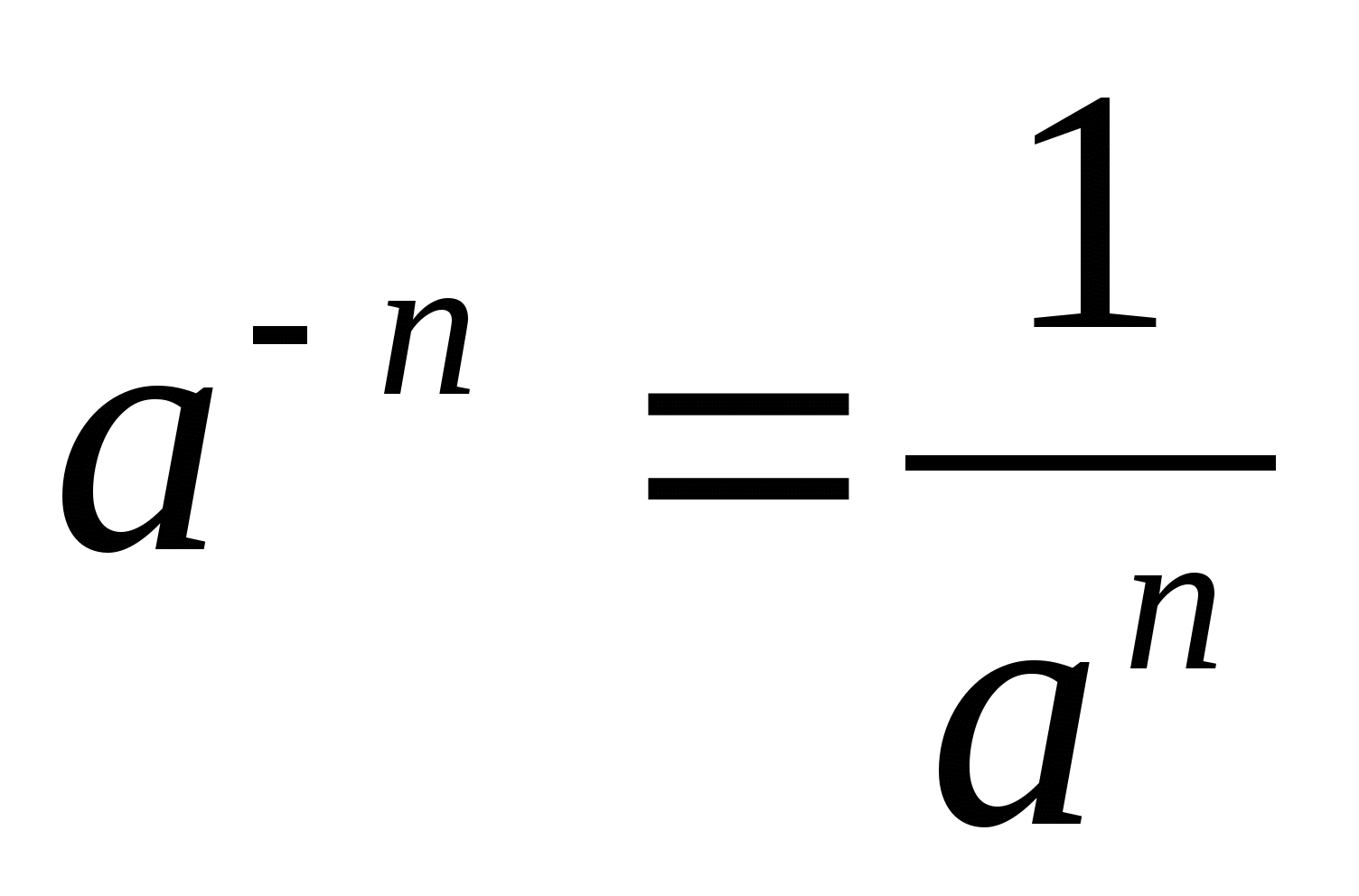
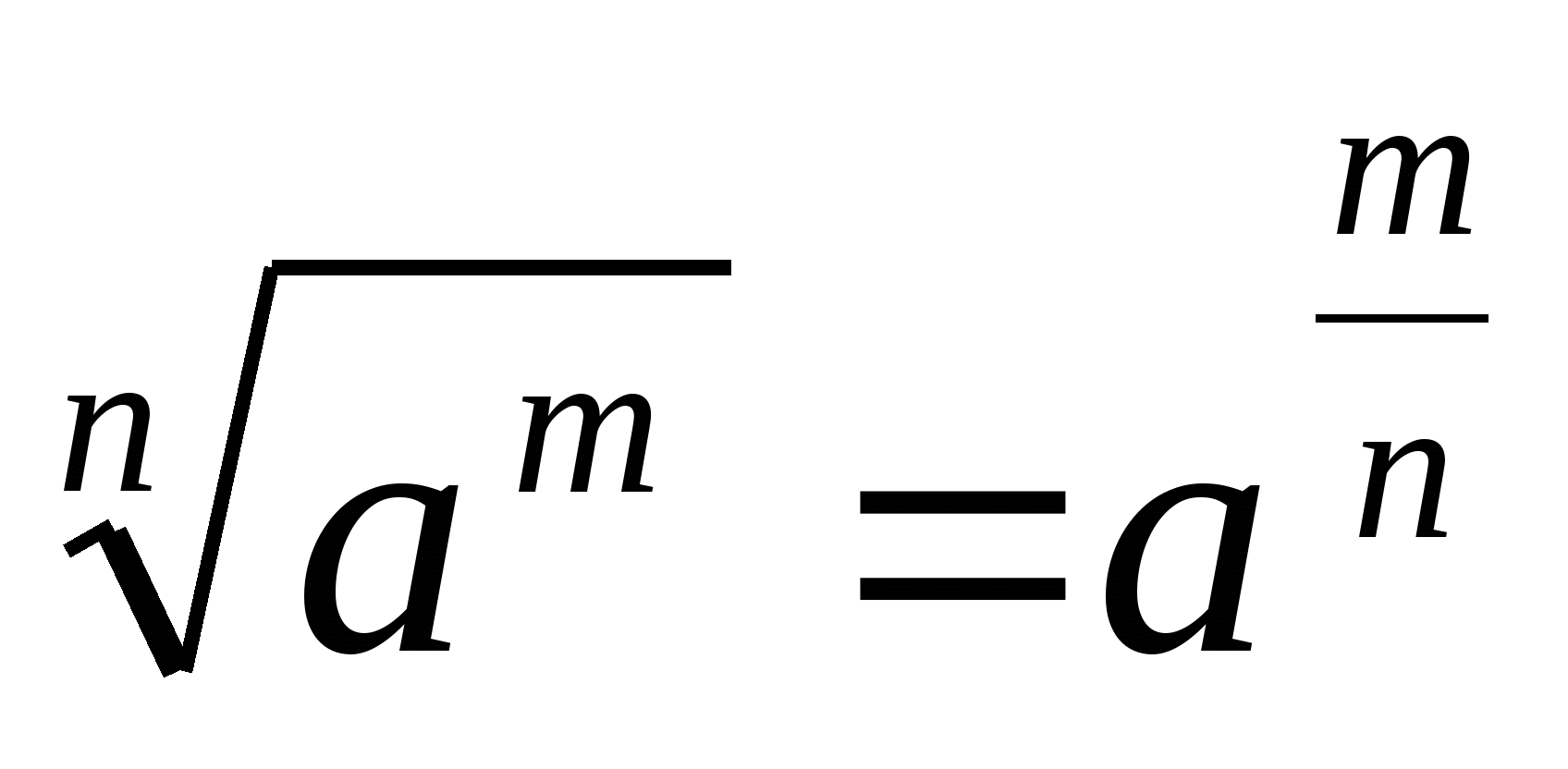
Вместо 9 могло быть любое другое постоянное число, обозначим буквой С [це] (константа).

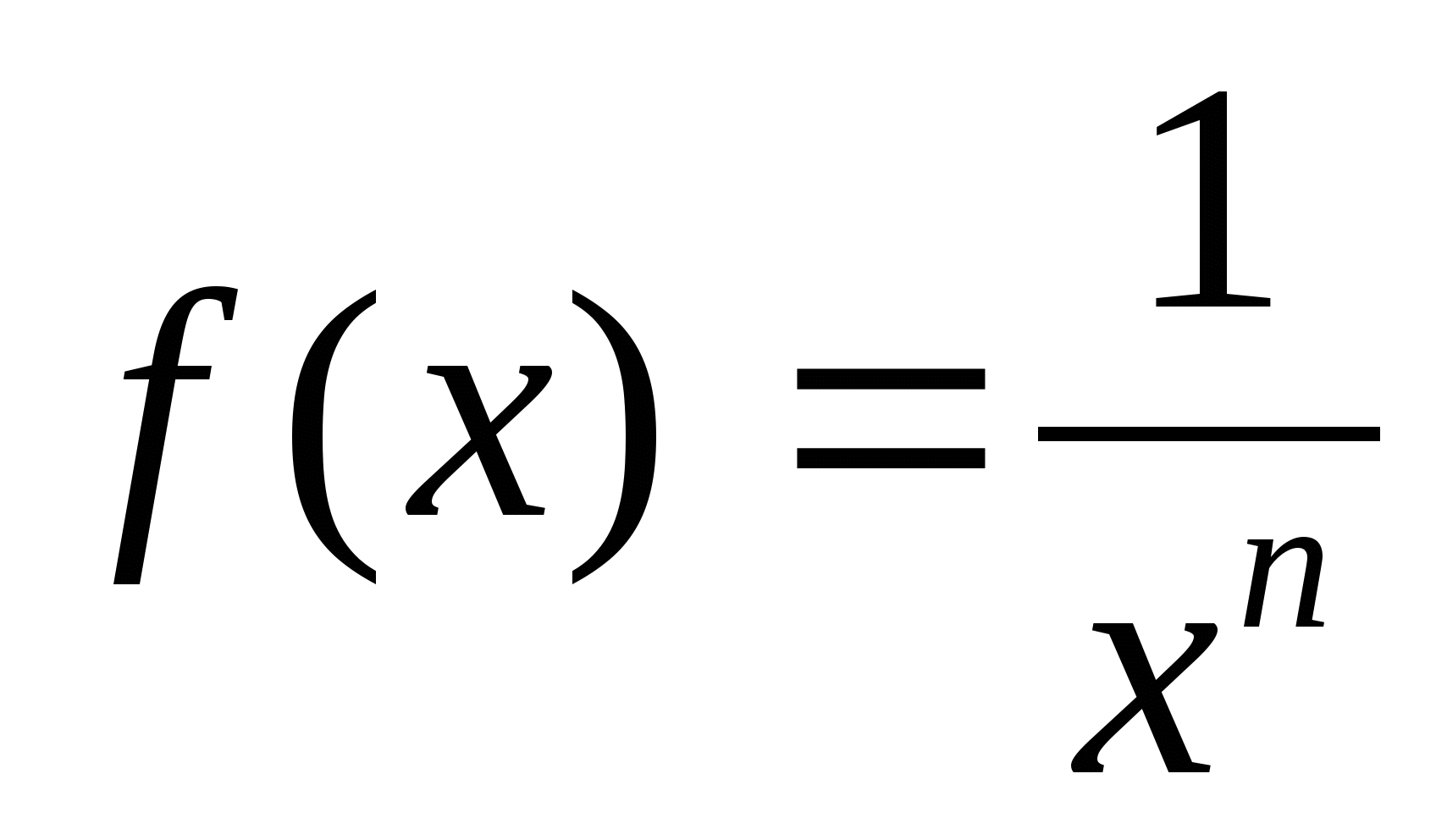
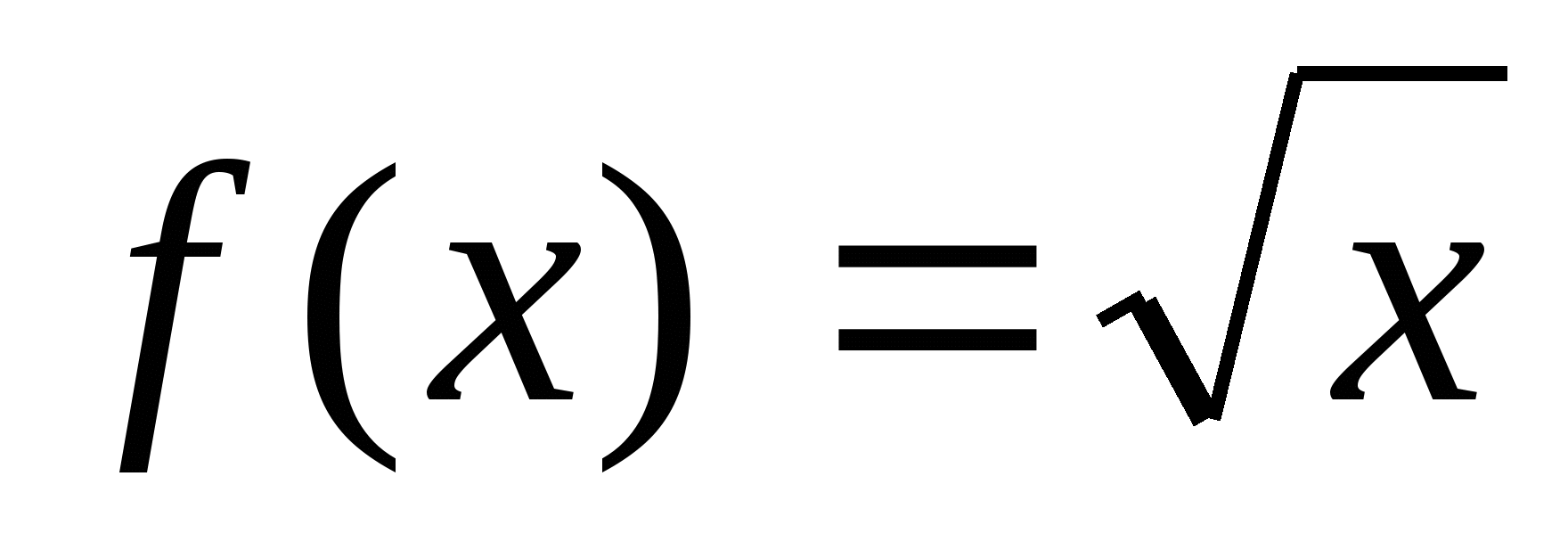
Получили формулу  - производная постоянной величины равна нулю.

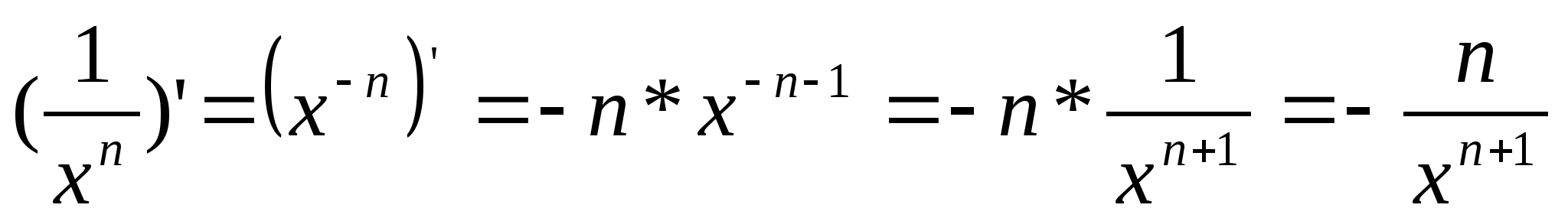
Мы уже знаем три формулы для нахождения производных:

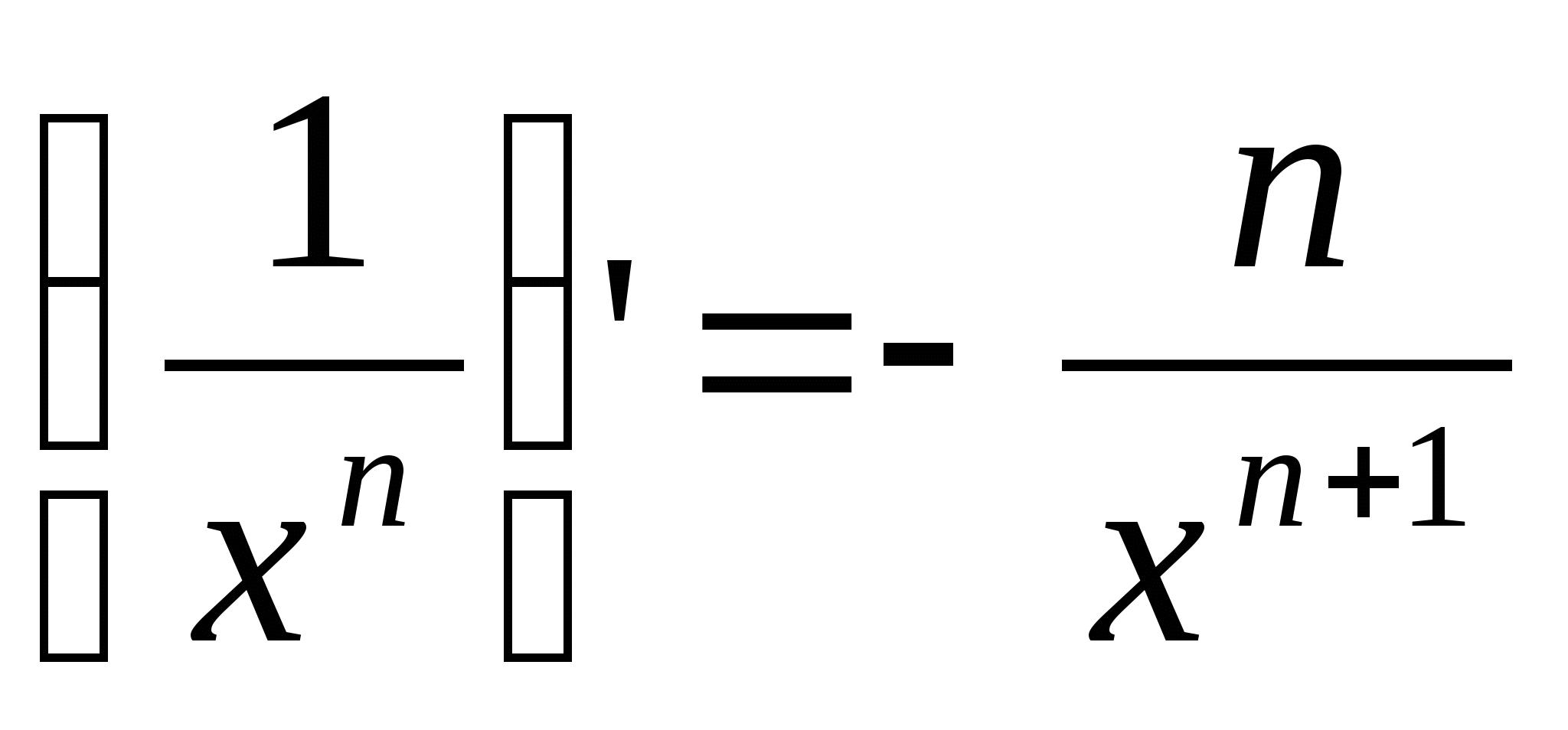


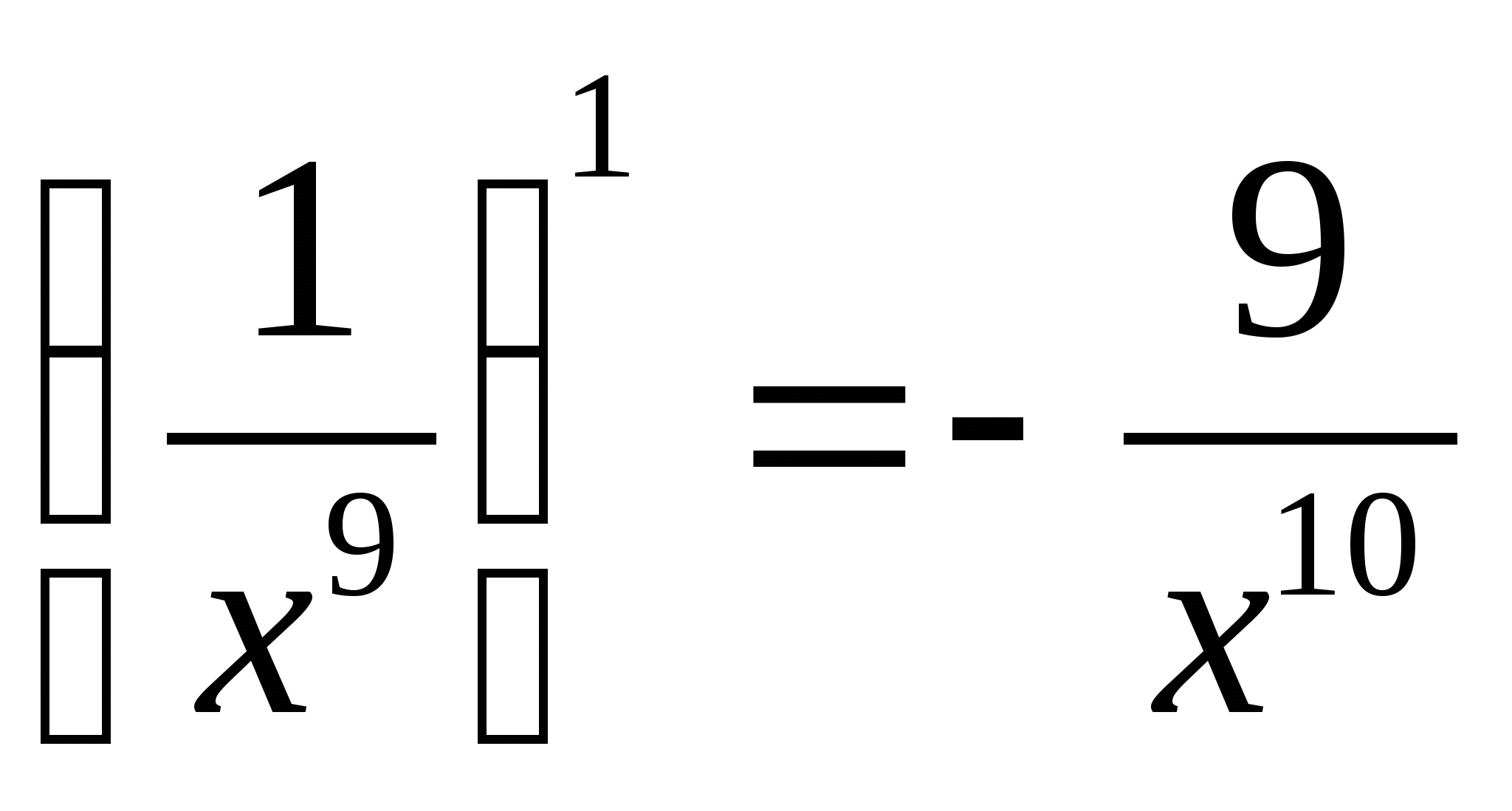
Пользуясь этими формулами и вспомогательными формулами действий над степенями из школьного курса.

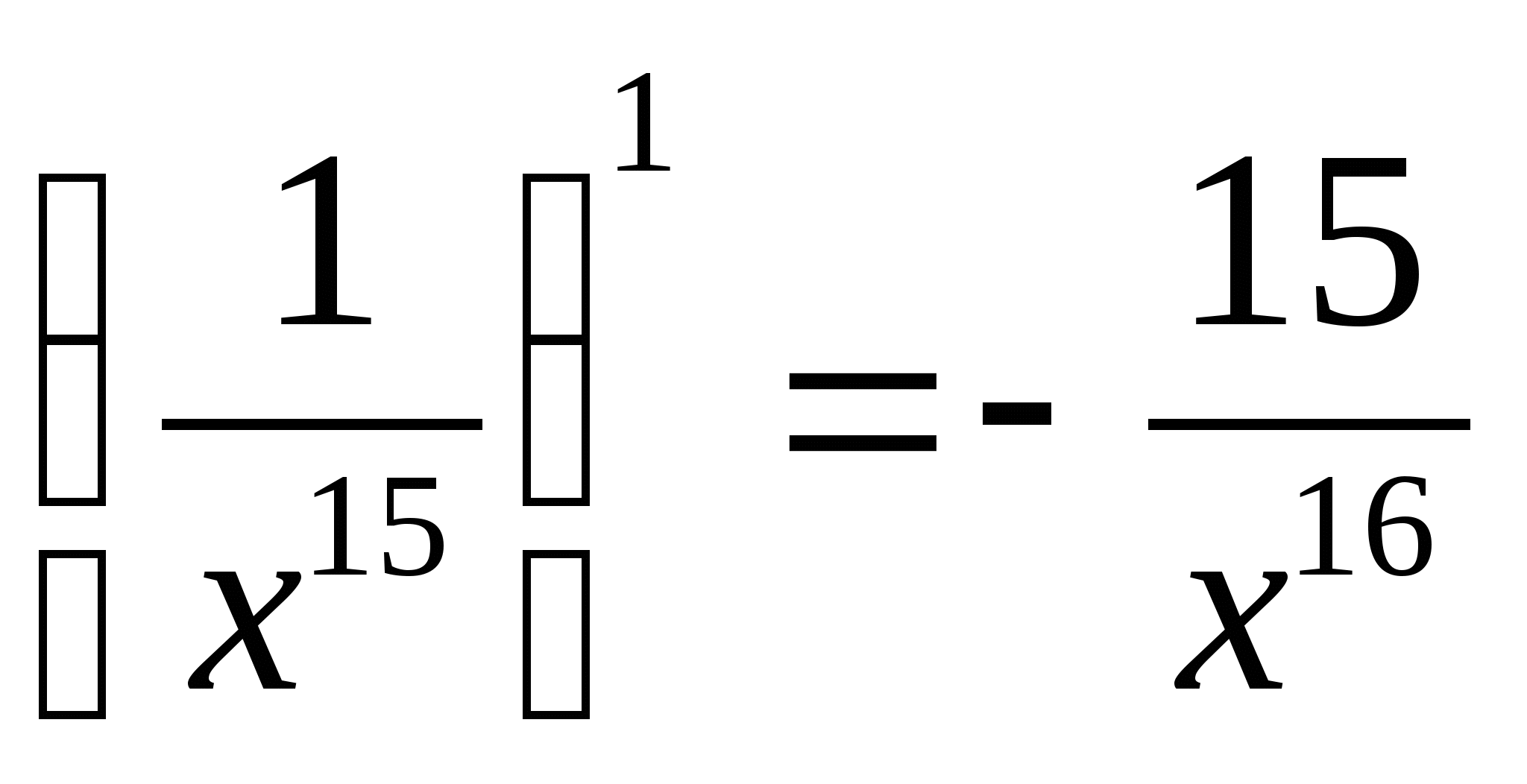
и ,

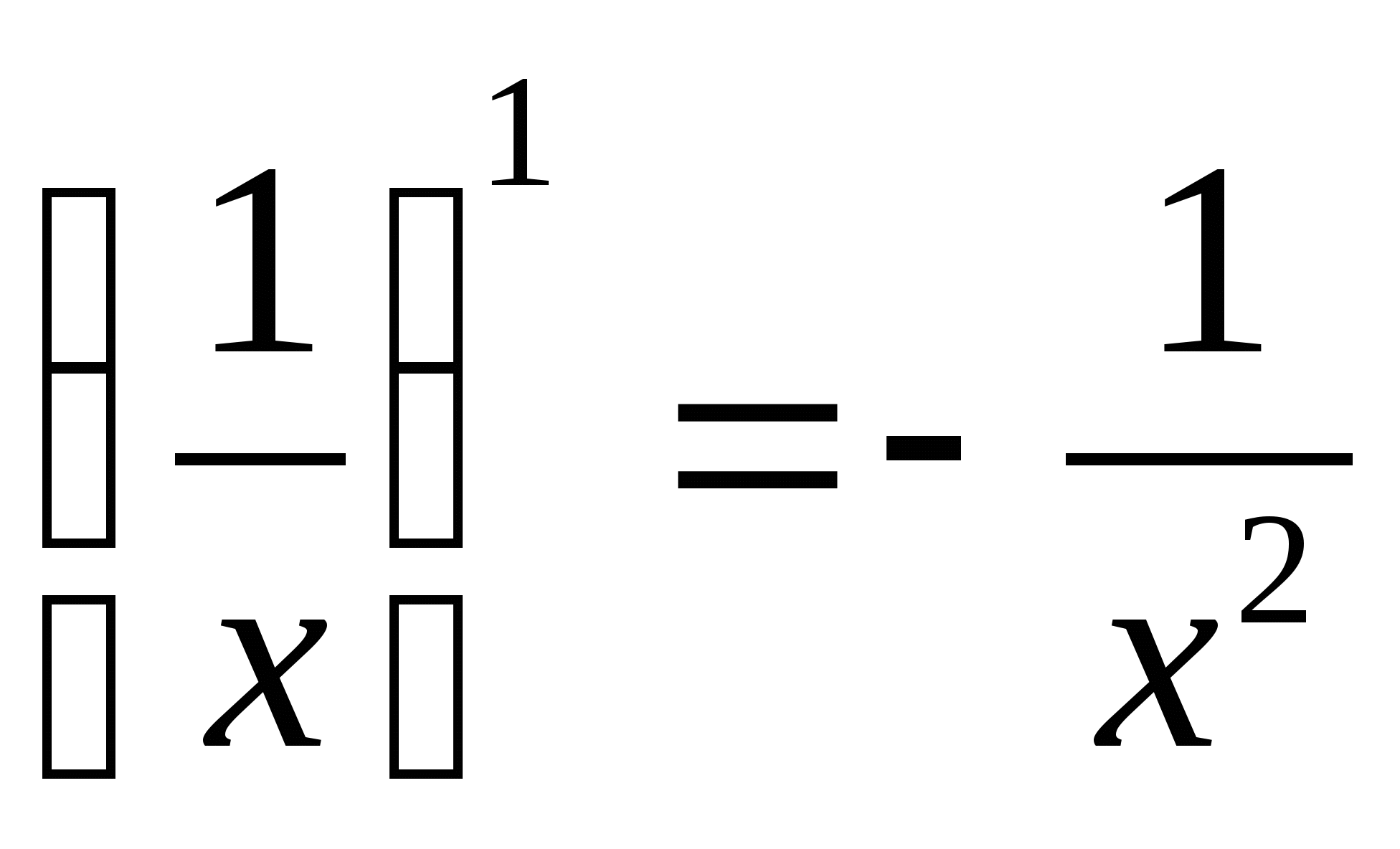
выведем формулы для нахождения производных функций  и 

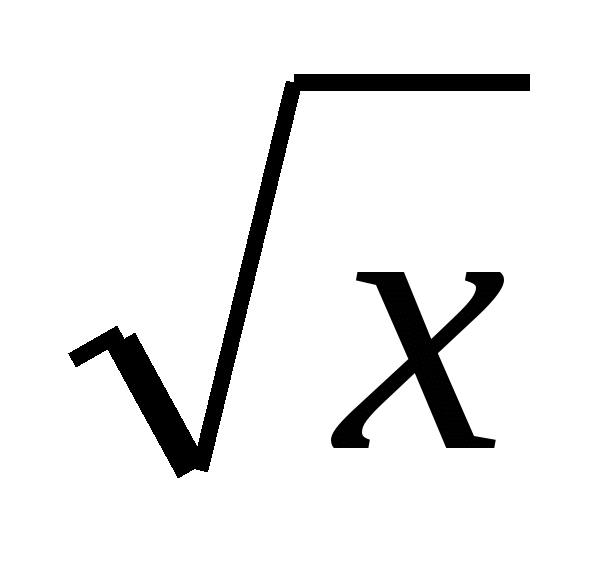
1)

Получили формулу  (1)

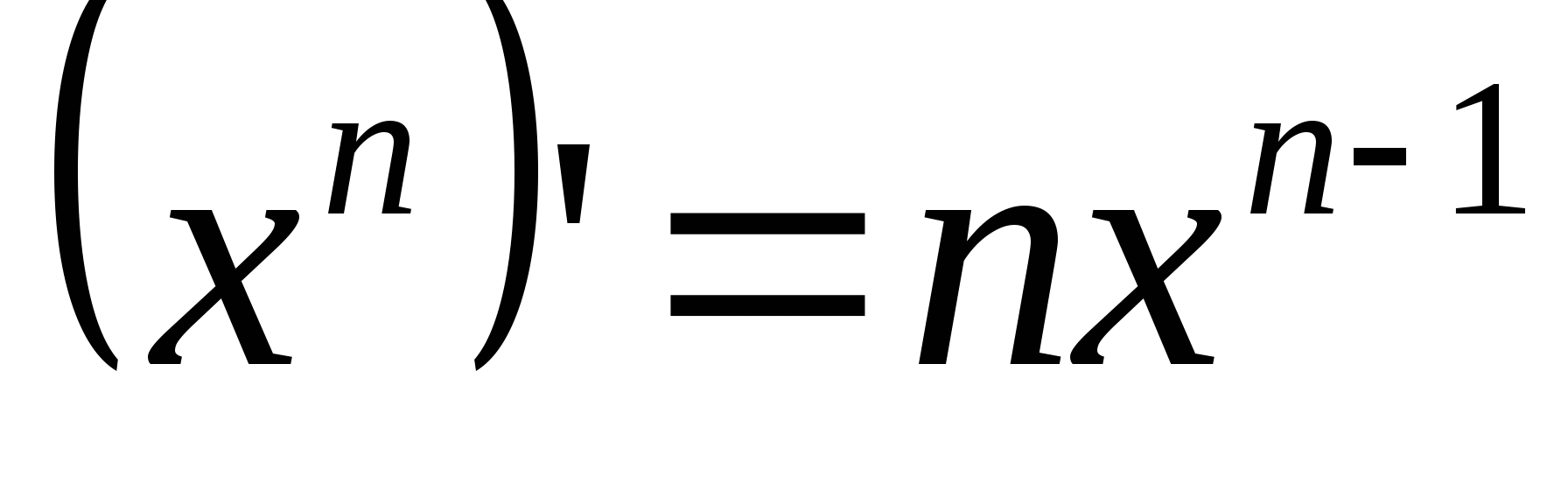
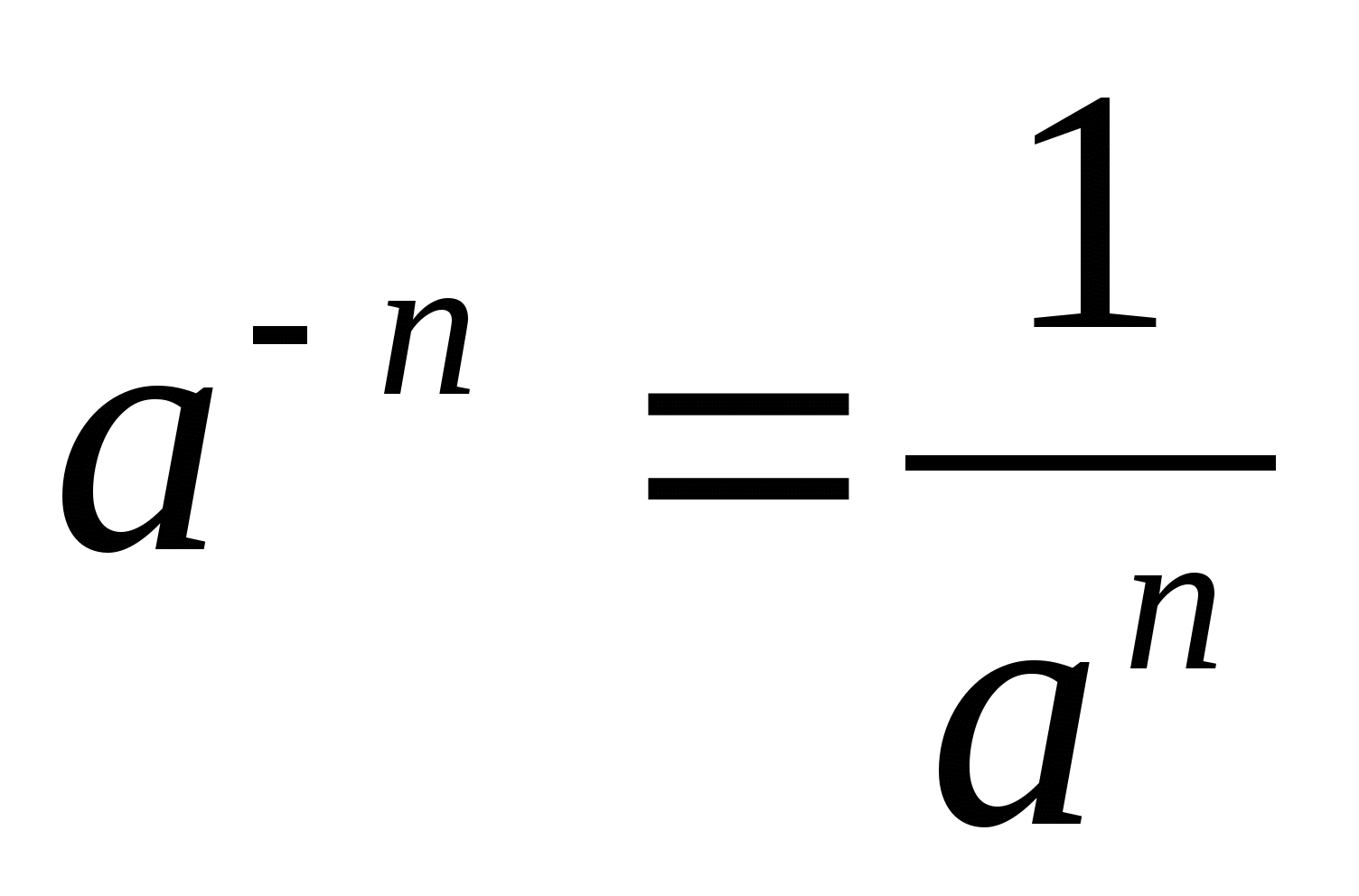
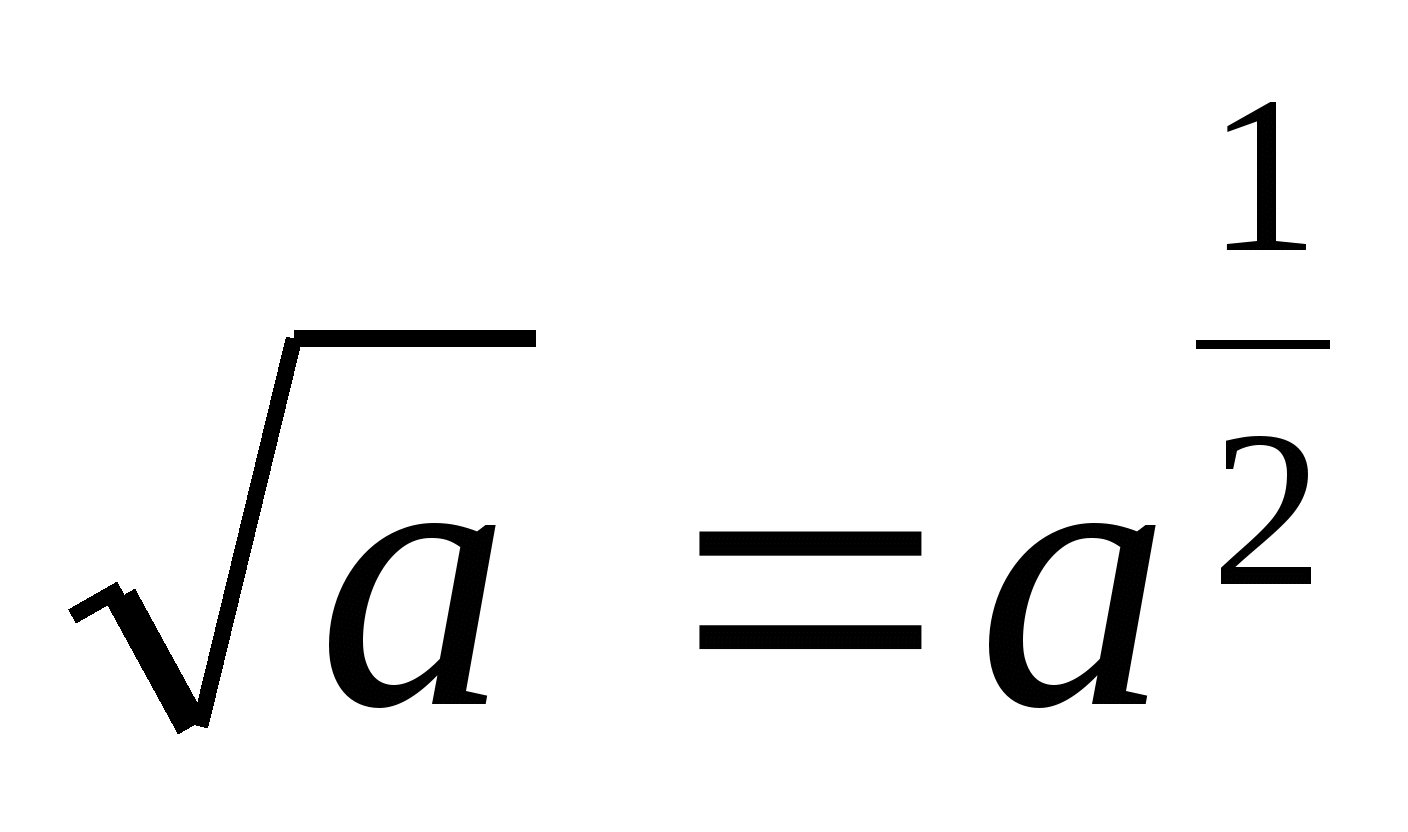
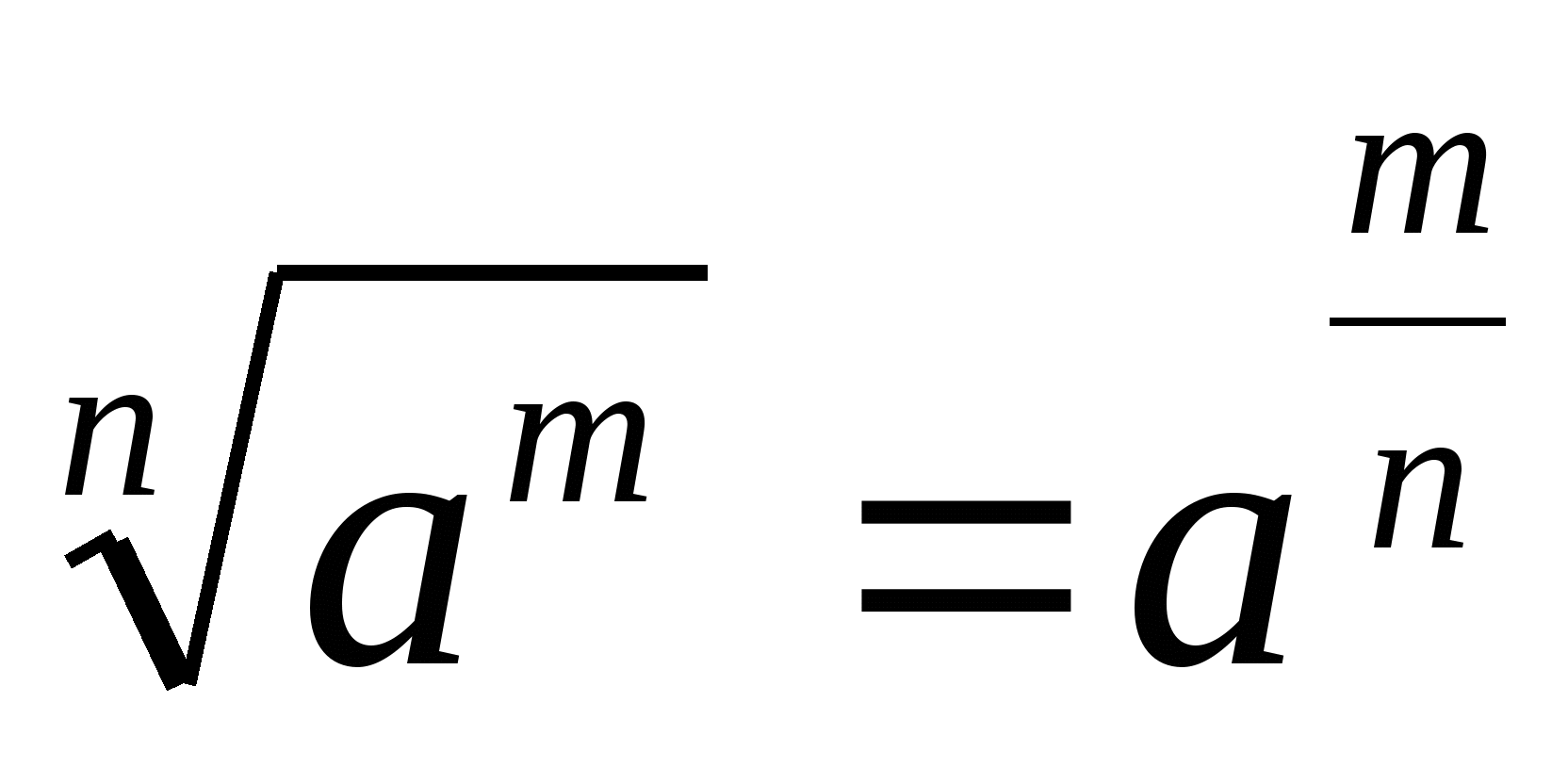
**Пример**. 1)

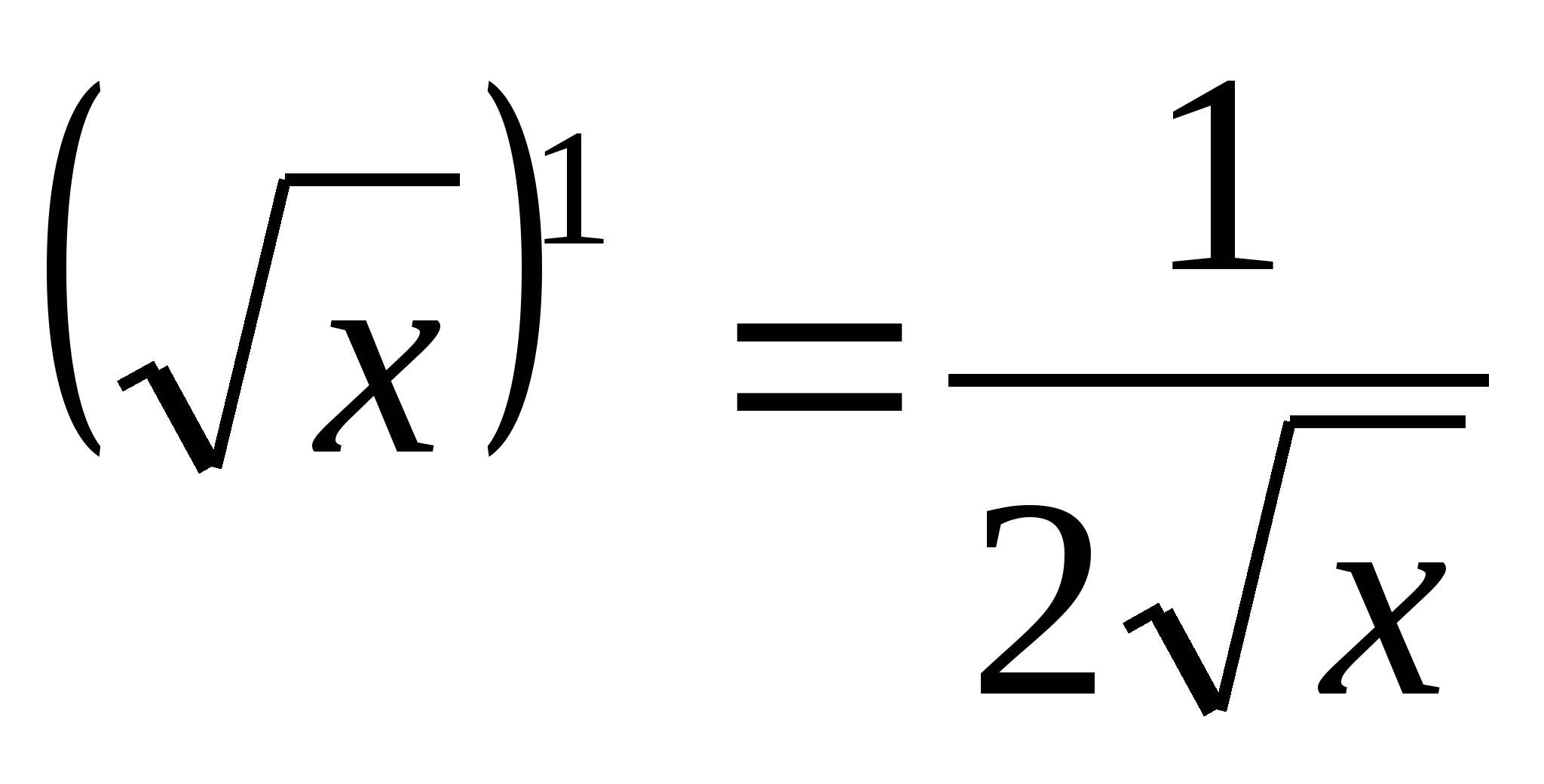
2)

из формулы (1) следует формула 

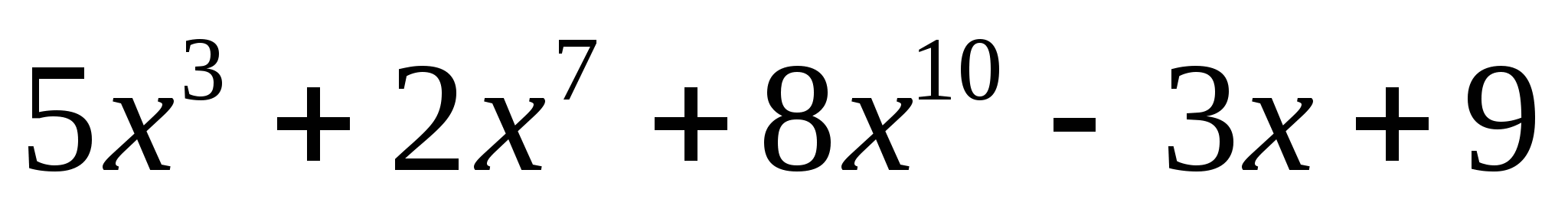
Найдем производную функции f(x)= 

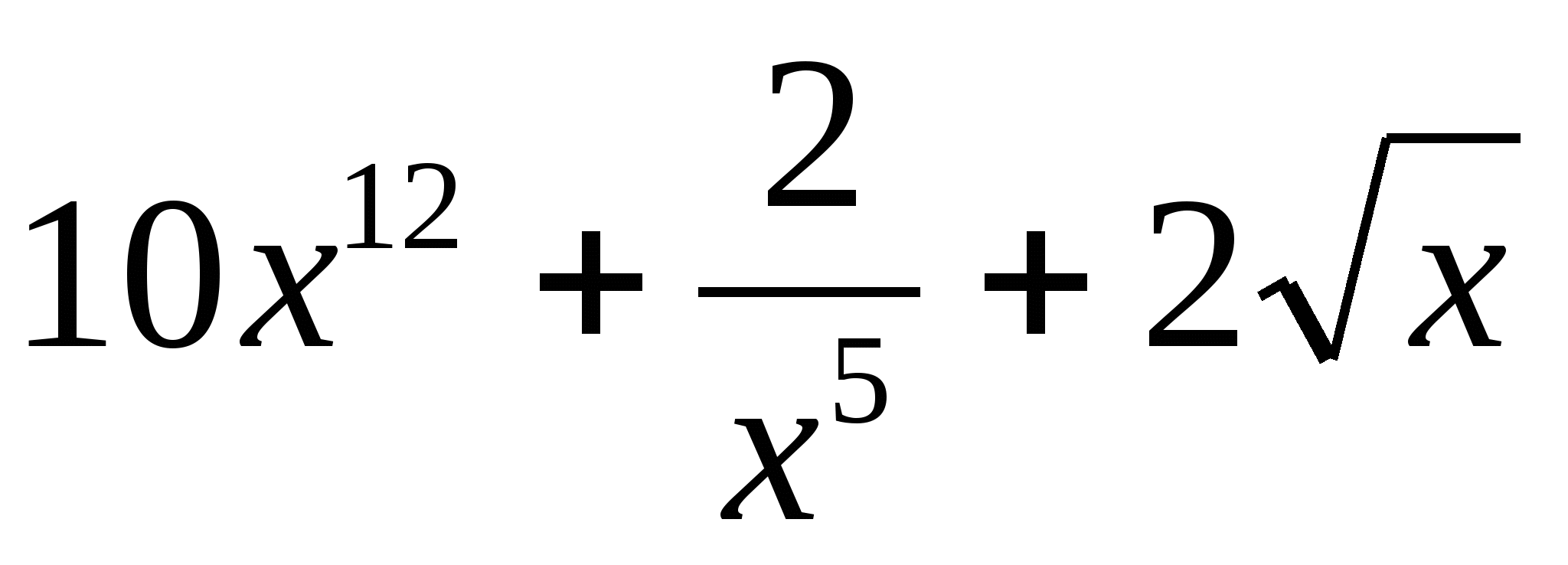
Будем использовать формулы:

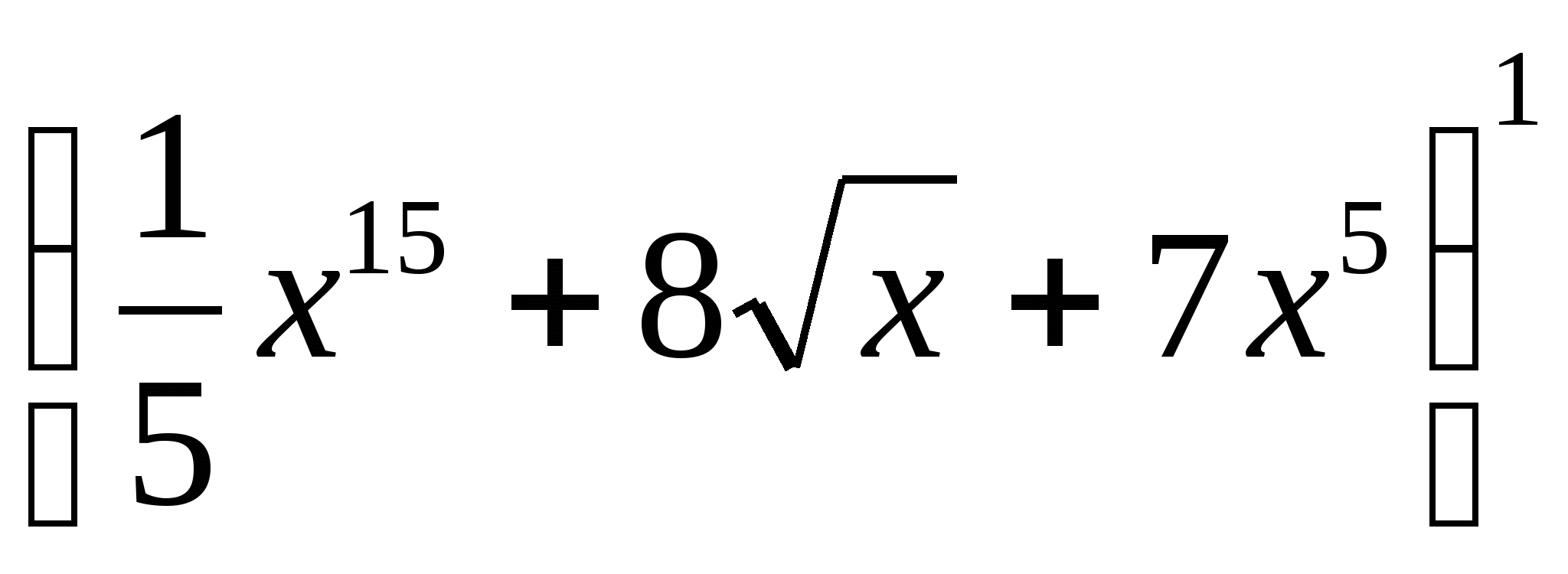


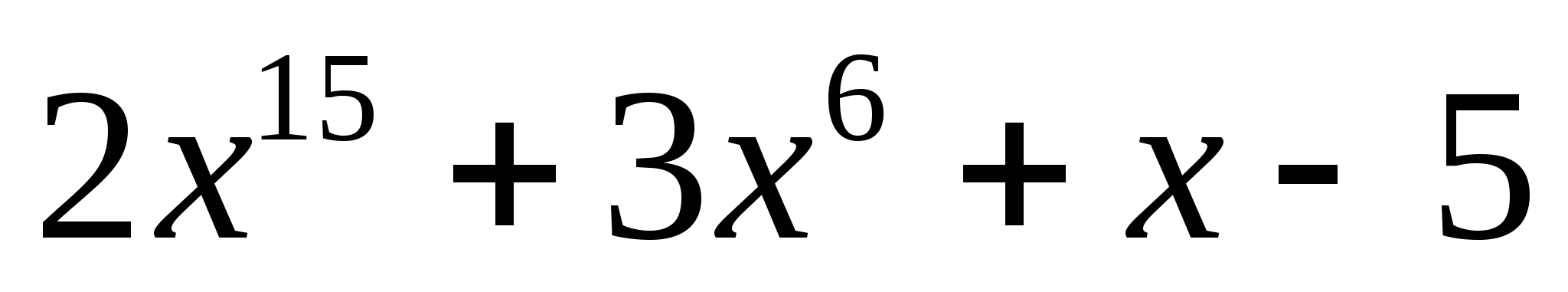
Итак, получили новую формулу: производная корня квадратного имеет вид 

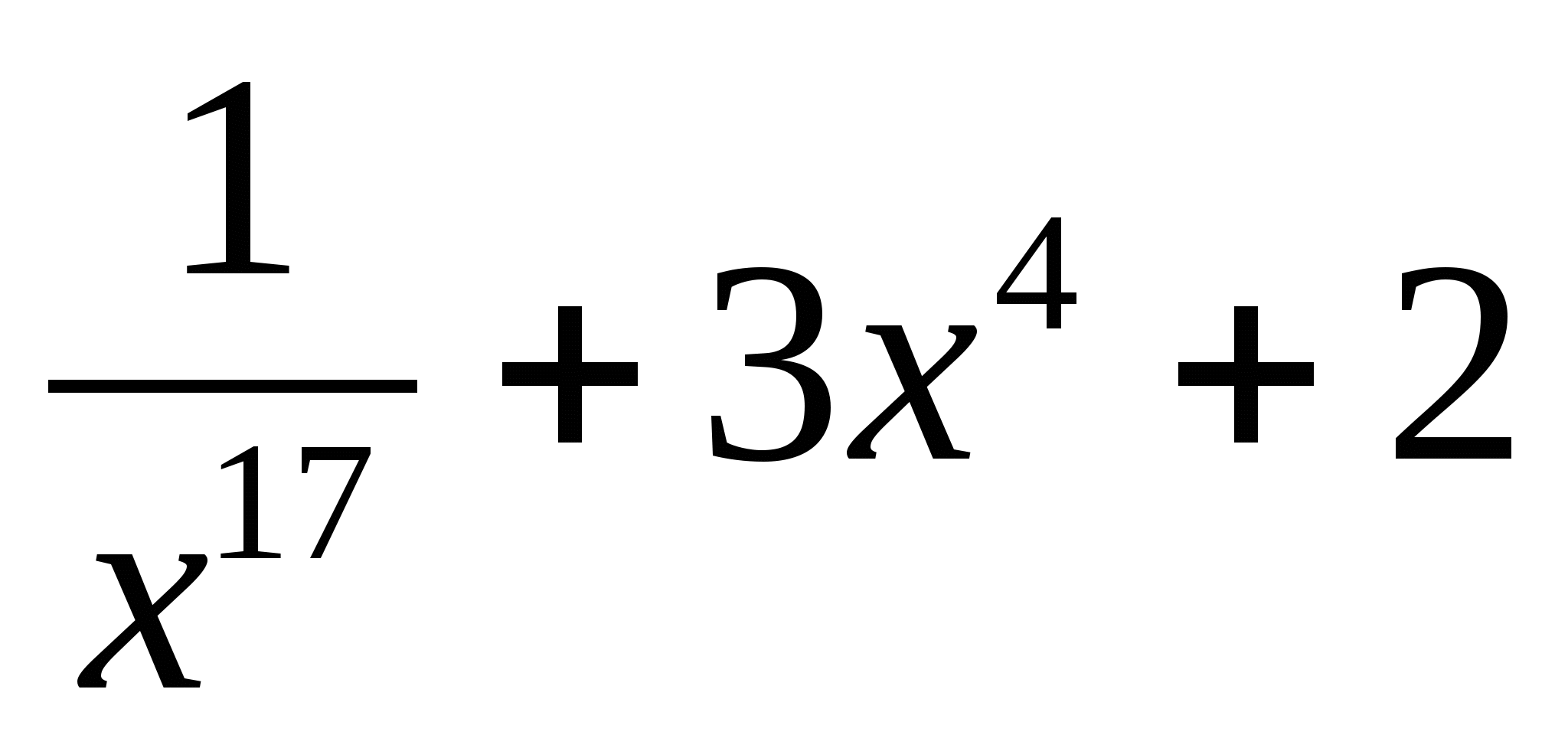
**Упражнения**

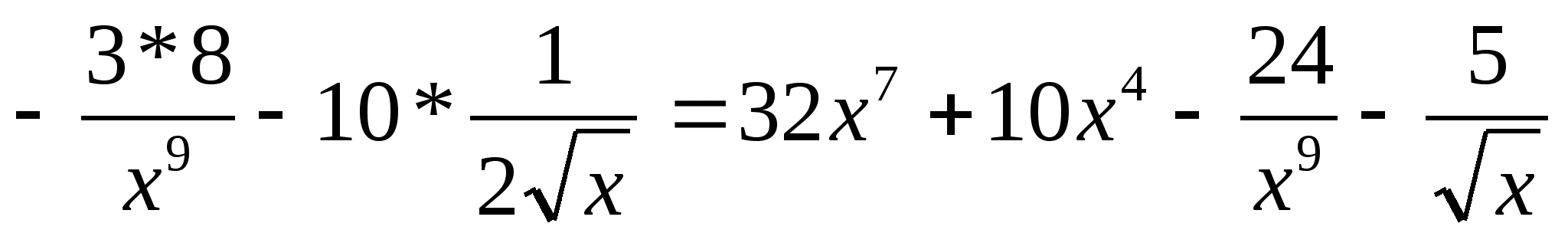
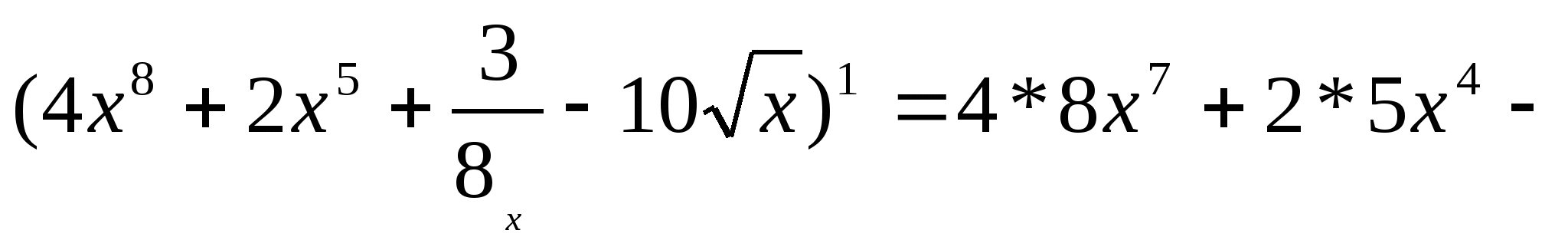
Найти производную функции: 1)

2)

3)

4)

5)

**Образец:**

**Тема 3. Формулы дифференцирования.**

**Правила нахождения производных.**

**3.1 Формулы дифференцирования**

**Пример 1**. Найти производную функции *y = x4*

 Р е ш е н и е: Имеем *y' = (x4)' = 4x3*  
  
**Пример 2**. Найти производную функции *y = 3cos(x)*

 Р е ш е н и е: Имеем *y' = (3cos(x))' = -3sin(x)*  
  
 **Пример 3.** Найти производную функции *y = tg (x)*

Р е ш е н и е: Имеем hello_html_m2f96b6c4.png  
  
**Пример 4**. Найти производную функции *y = arcsin (x)*  
 Р е ш е н и е: Имеем hello_html_m3a339dfc.png

**3.2 Основные правила дифференцирования:**

*I. Производная суммы (разности):*

***(u+v)' =u' + v'*,**

**Пример1.** Найти производную функции *y = sin(x) + x3*  
 Р е ш е н и е:

Имеем *y' = (sin(x) + x3)' = cos(x) + 3x2*  
  
**Пример 2.** Найти производную функции *y = ln(x) + arctg(x)*  
Р е ш е н и е: Имеем

hello_html_m2234dc8d.png

*Постоянный множитель выносится за знак производной*

***(Cu)' =C u'*,**

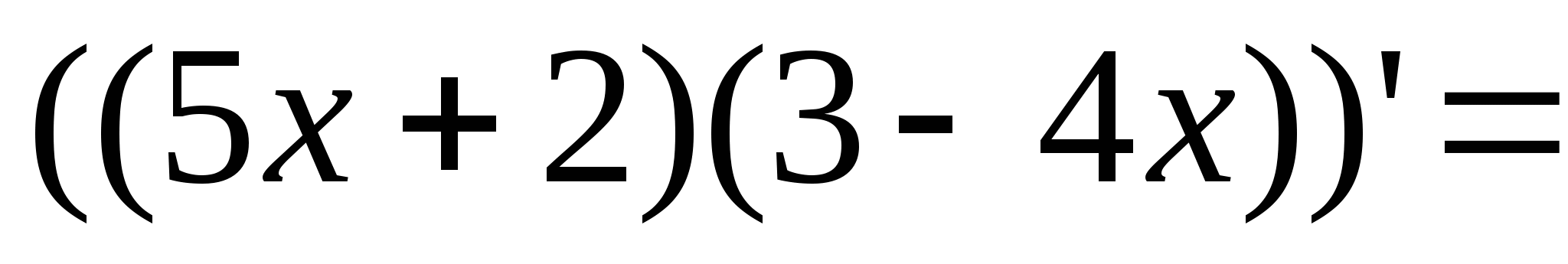
***II. Производная произведения***

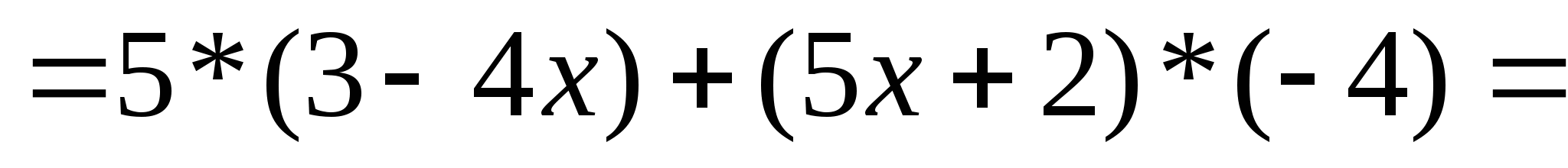
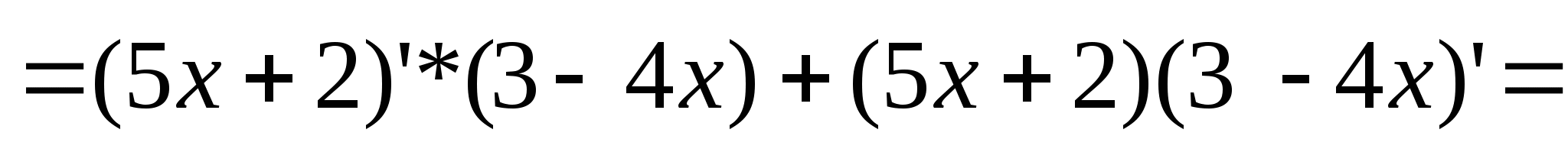
Пусть функция представляет собой произведения двух функций u и υ.

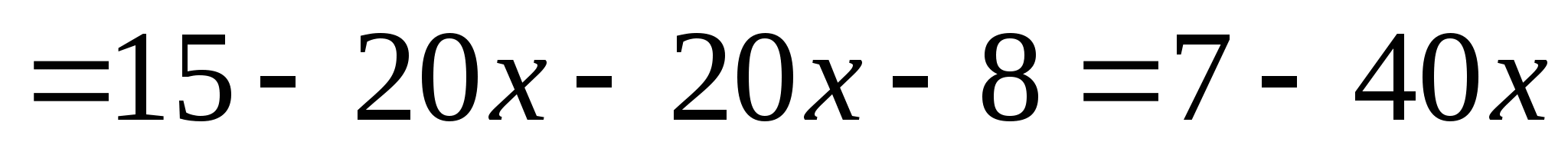
u - y υ-вэ.

(u\*υ)’=u’\*υ+u\*υ’

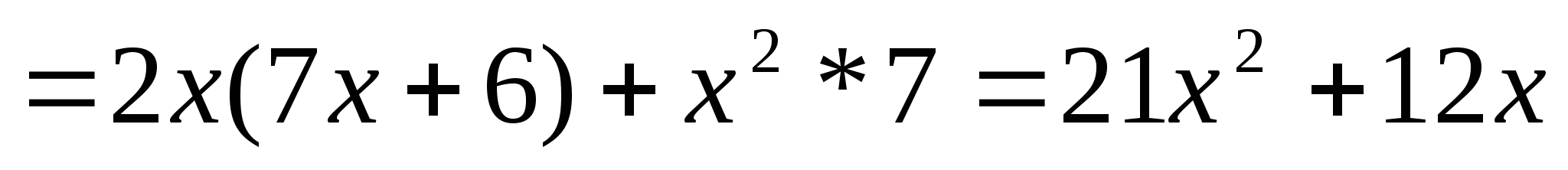
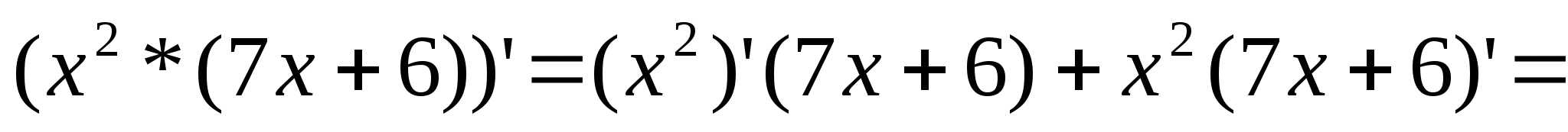
**Пример 1**







**Пример 2**.

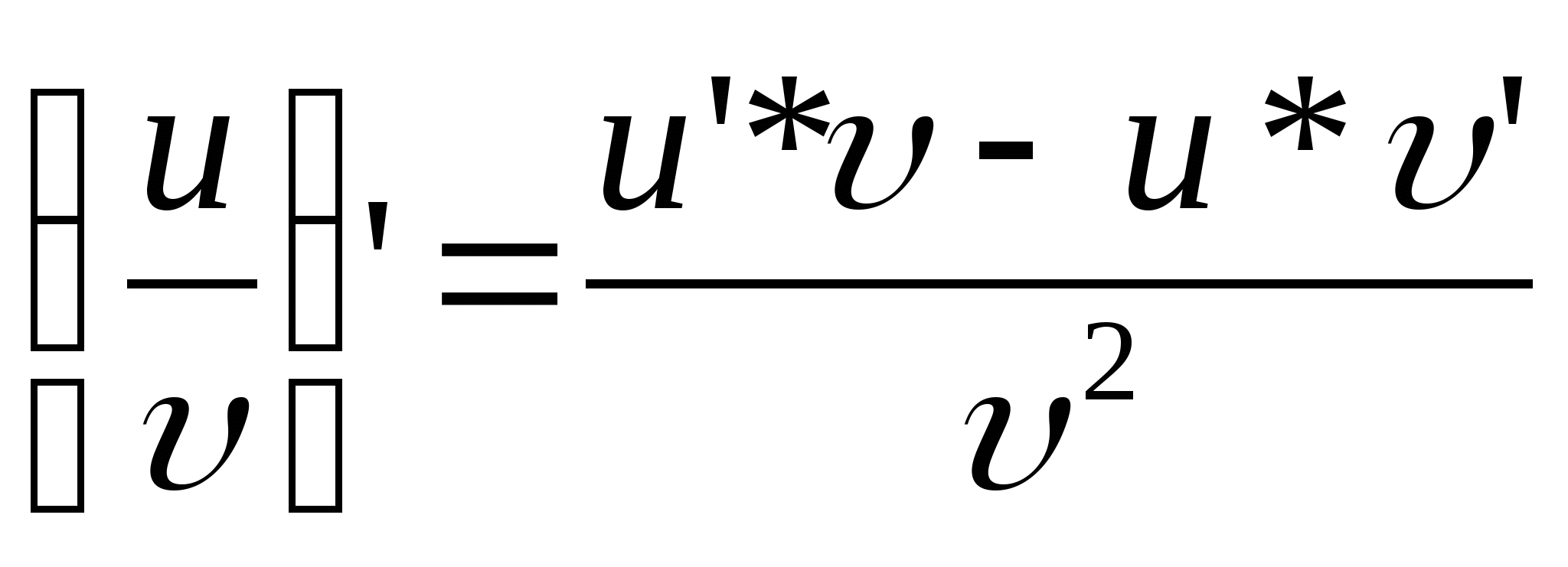


**Упражнения**

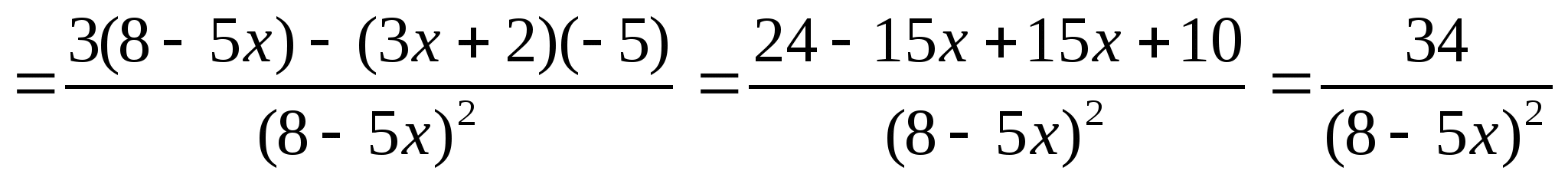
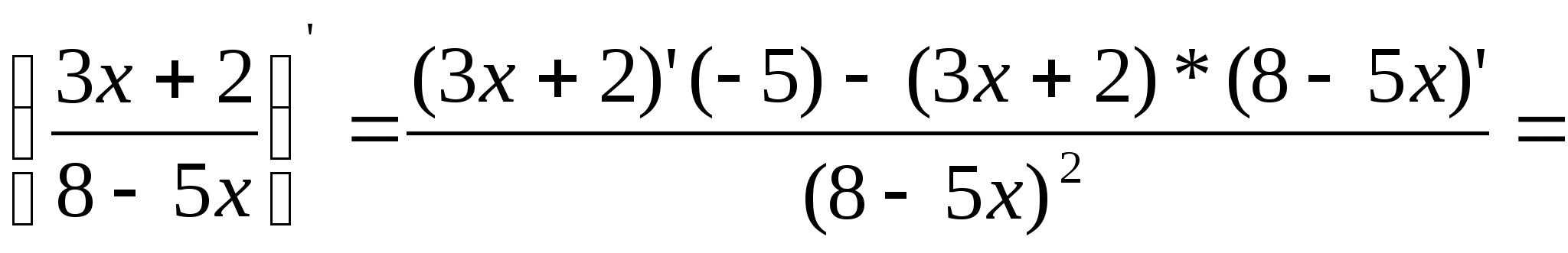
Найти производную функции:

1)(10х-3)(5+7х) 2)4х\*(3х+5)

*III. Производная дроби*

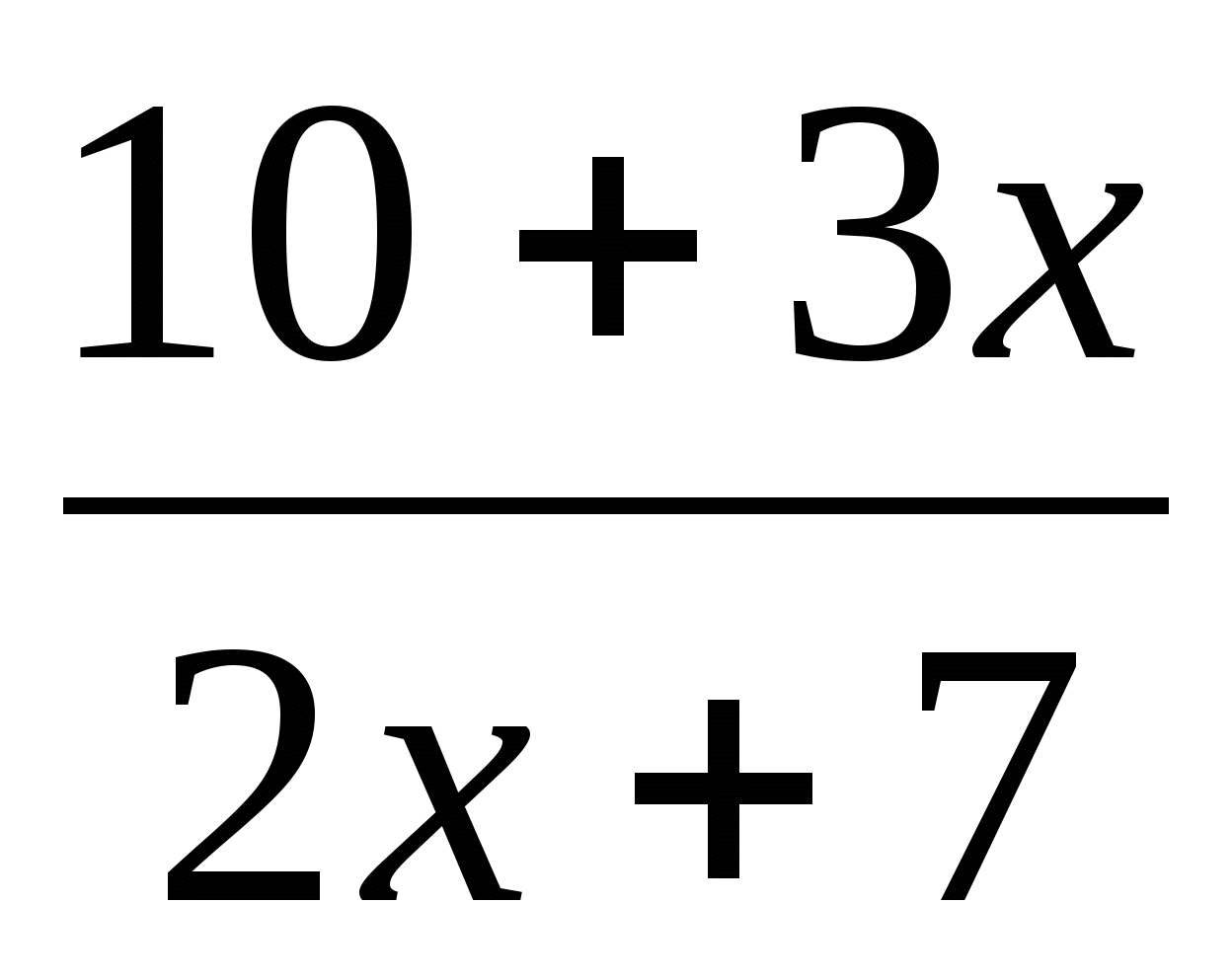
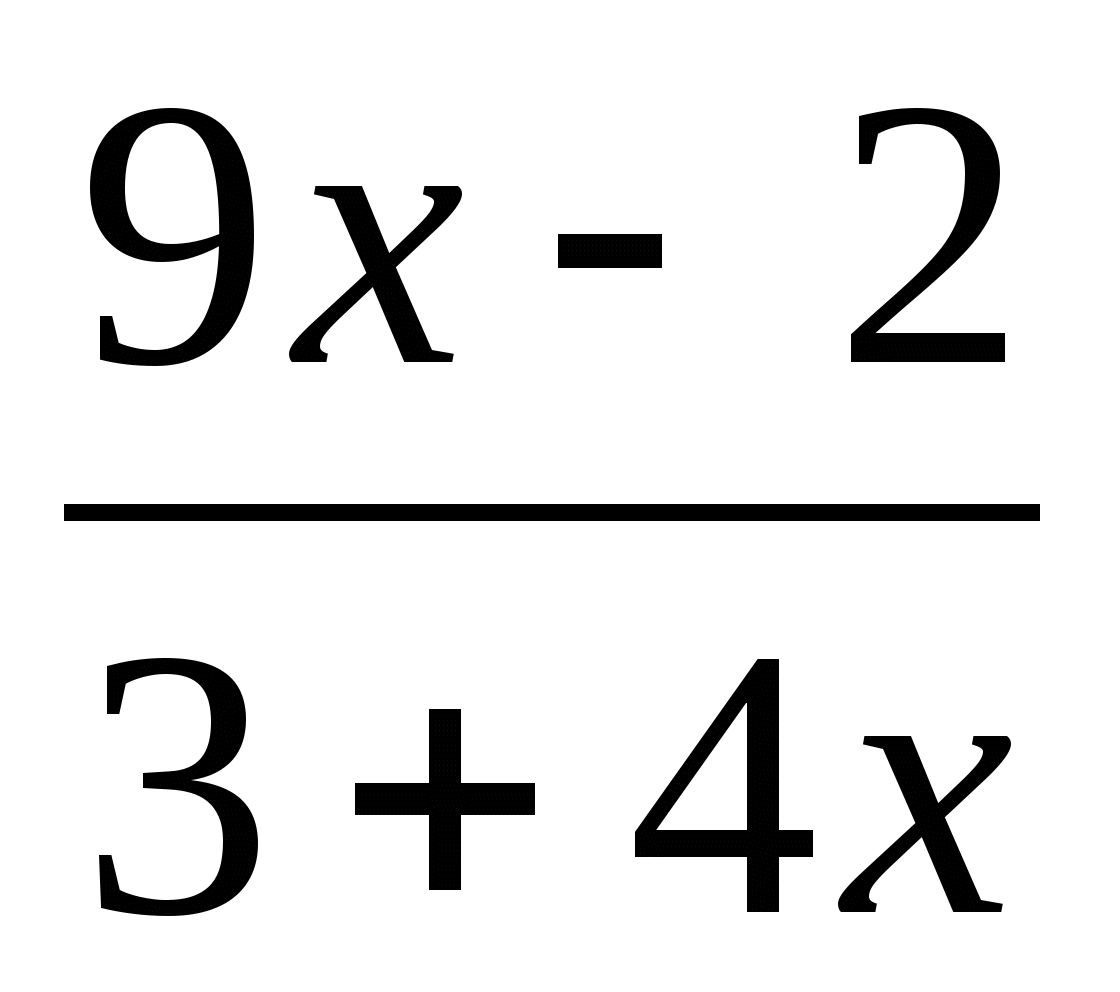
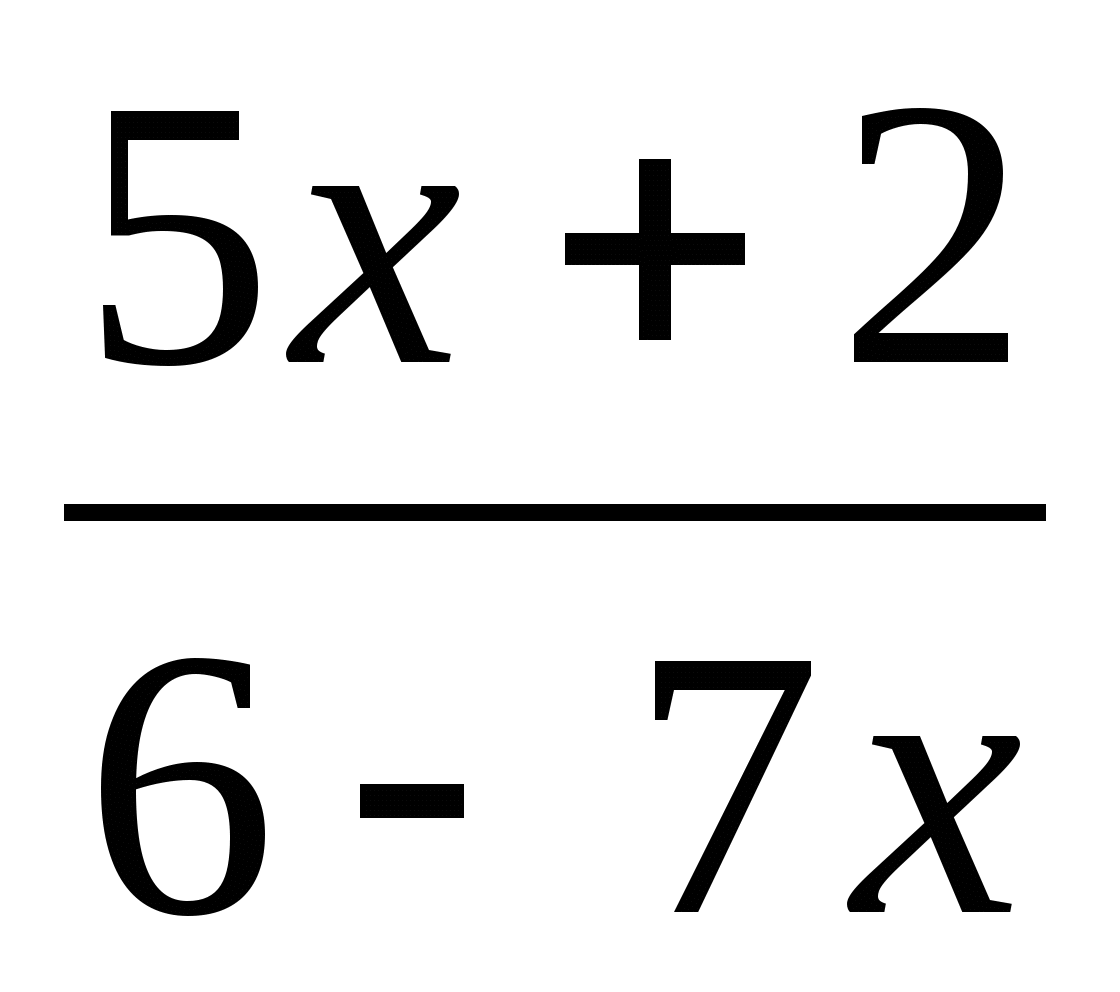
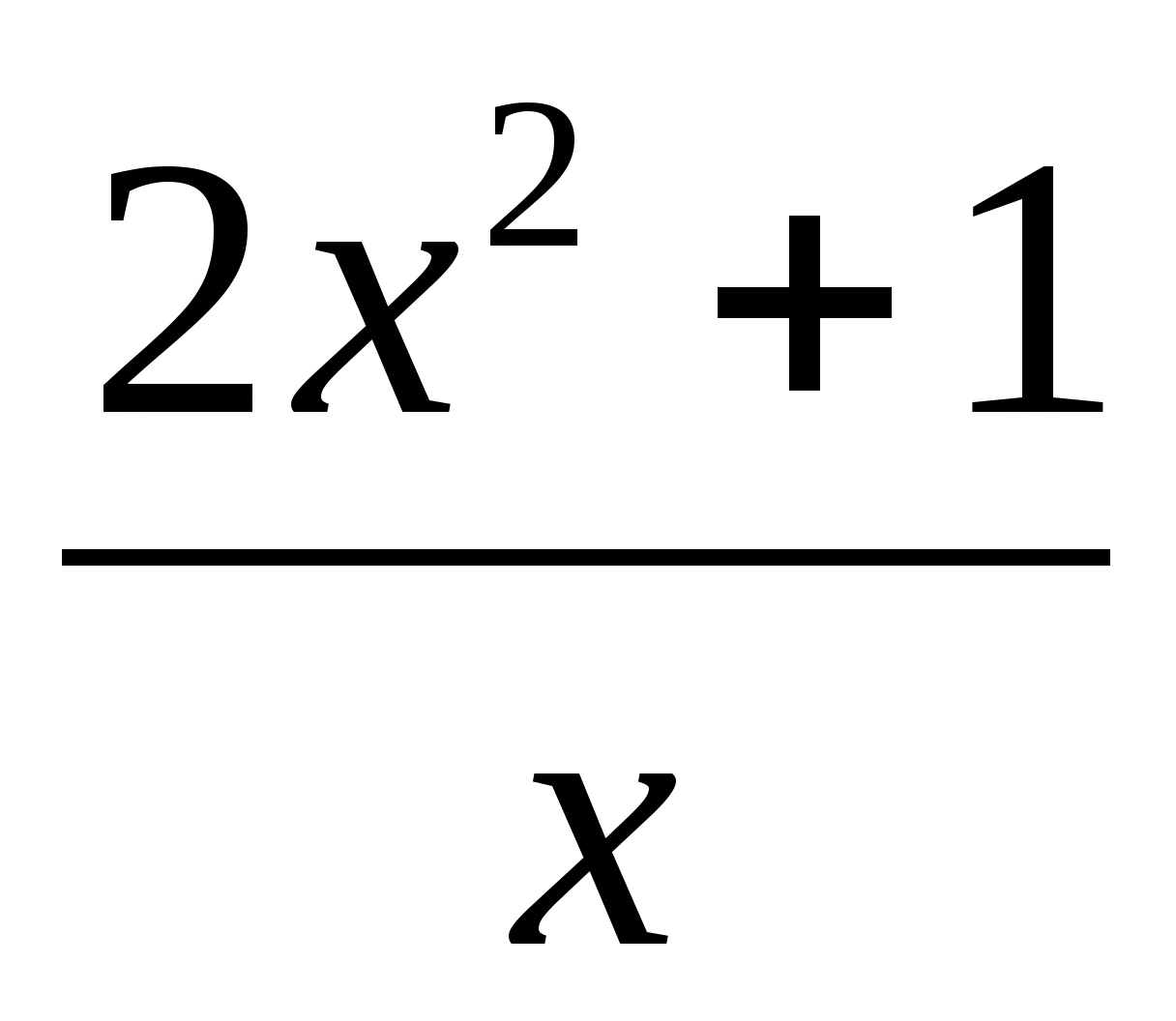
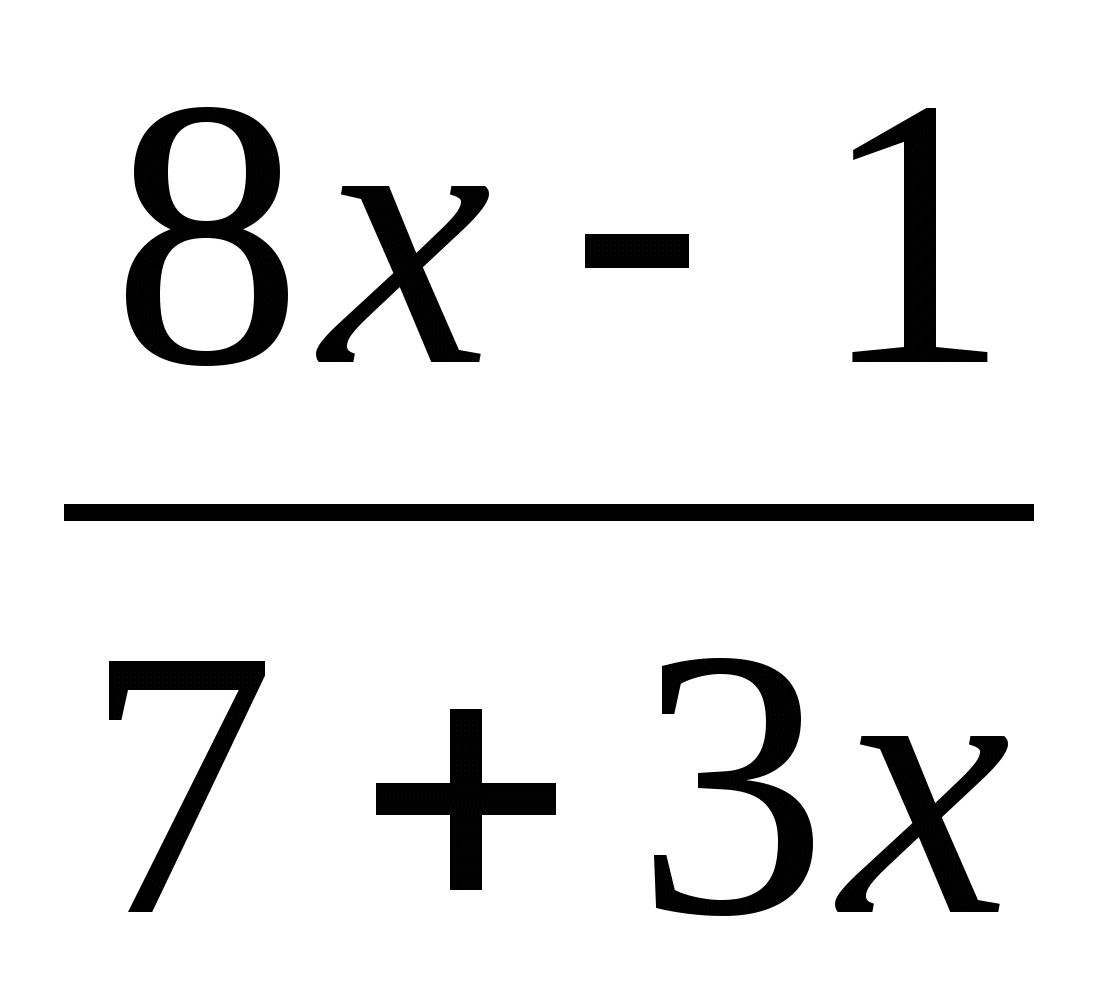


**Пример:**



**Упражнение**

Найти производную дроби:

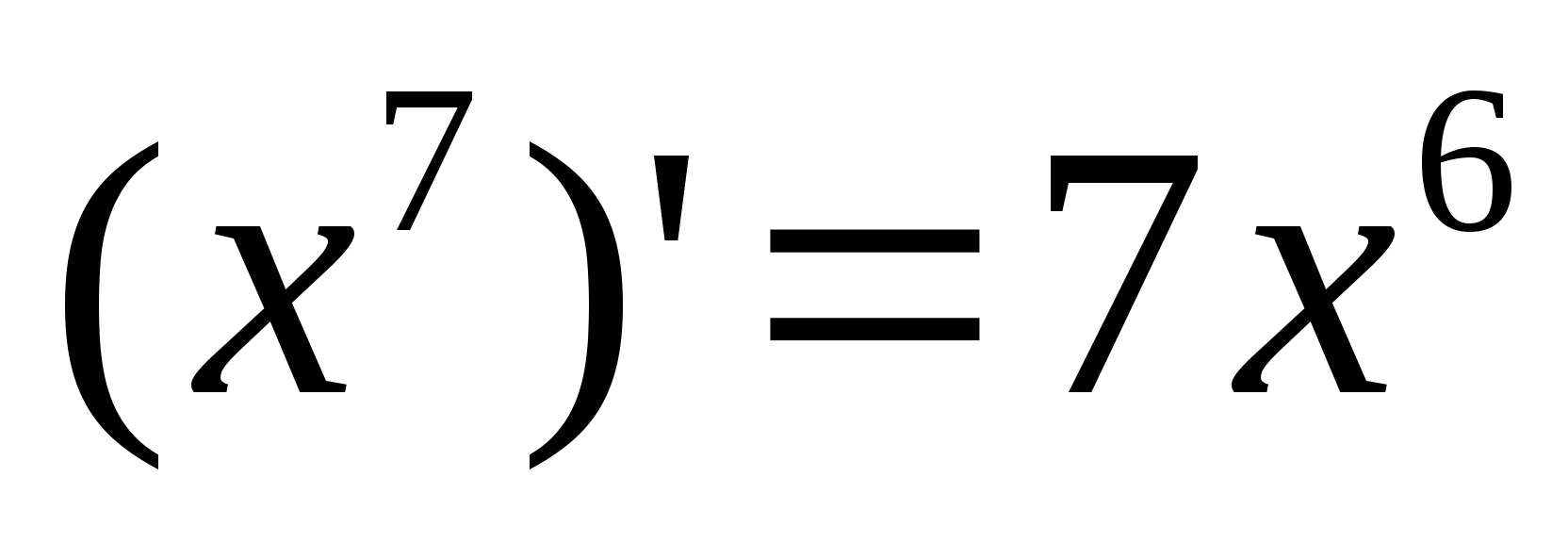
1) 2) 3) 4) 5)

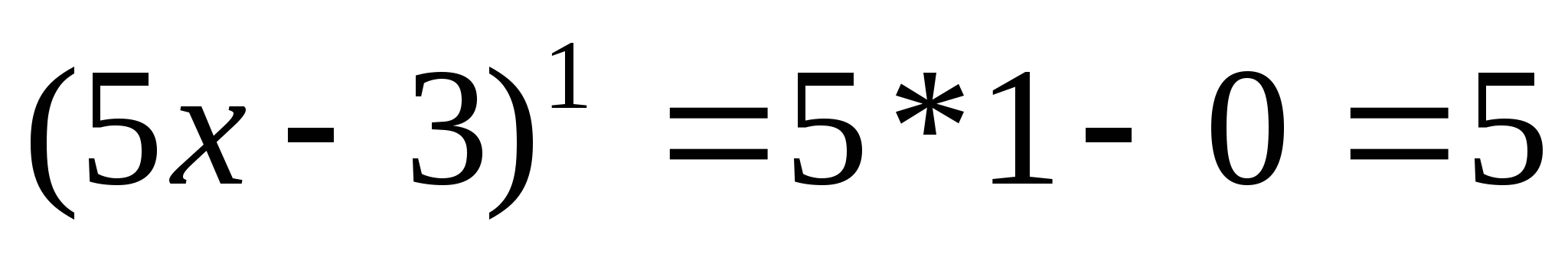
**Тема 4. Производная сложной функции**

Если функция f имеет производную в точке xo, а функция g имеет производную в точке yo = f(xo), то сложная функция h(x) = g(f(x)) также имеет производную в точке xo, причем:

hello_html_m780eef3e.png

Найдем производную следующих функций:

1)

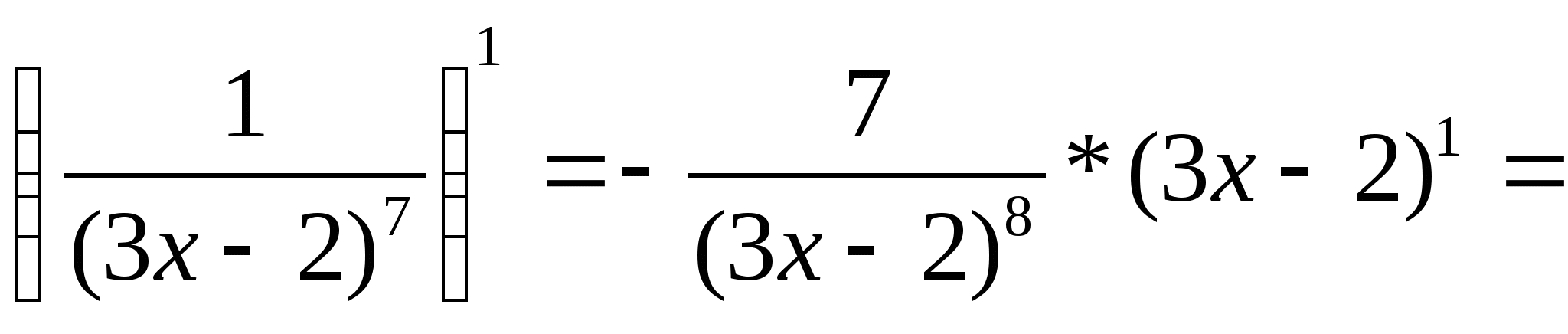
2) 

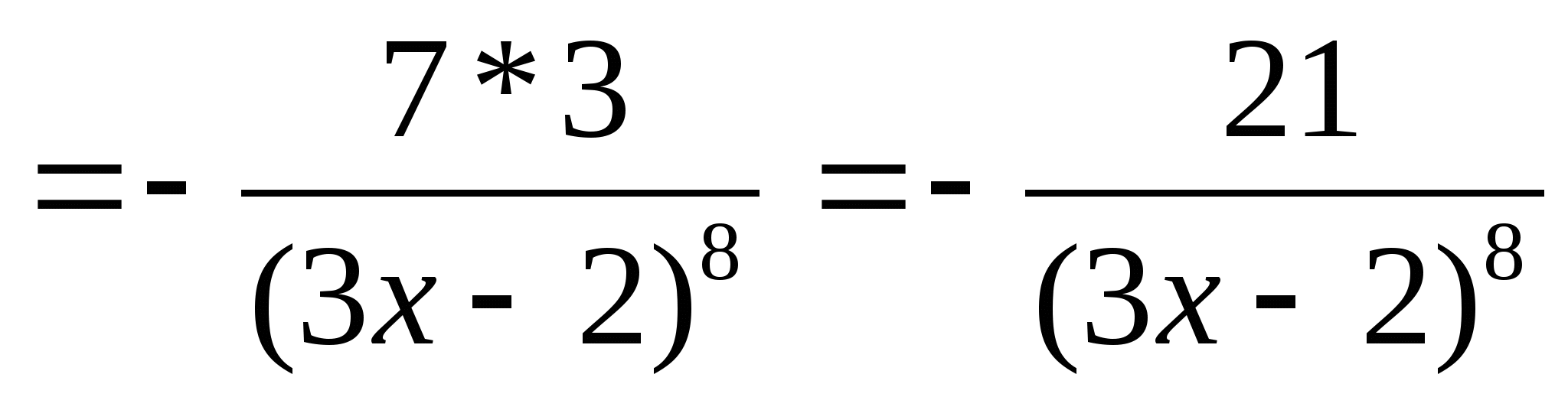
А теперь найдем производную сложной функции:

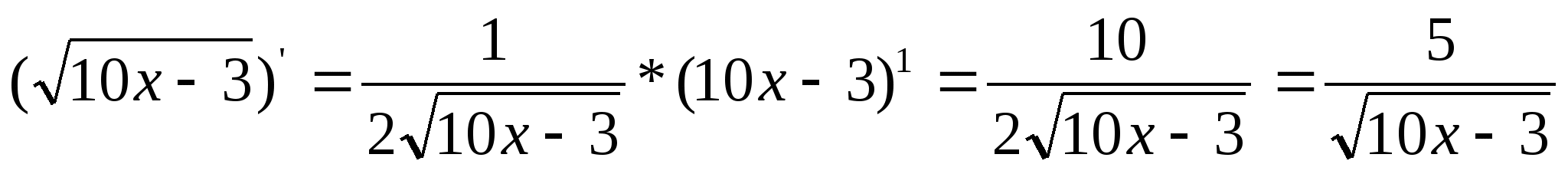
3) ((5х-3)7)’=7( 5х-3)6\* (5х-3)1=7\*5(5х-3)6= 35\*(5х-3)6;

4) ((8+7х)-3)’= -3\*(8+7х)-4\*(8+7х)1= - 3\*7(8+7х)-4 =

= - 21 \*(8+7х)-4

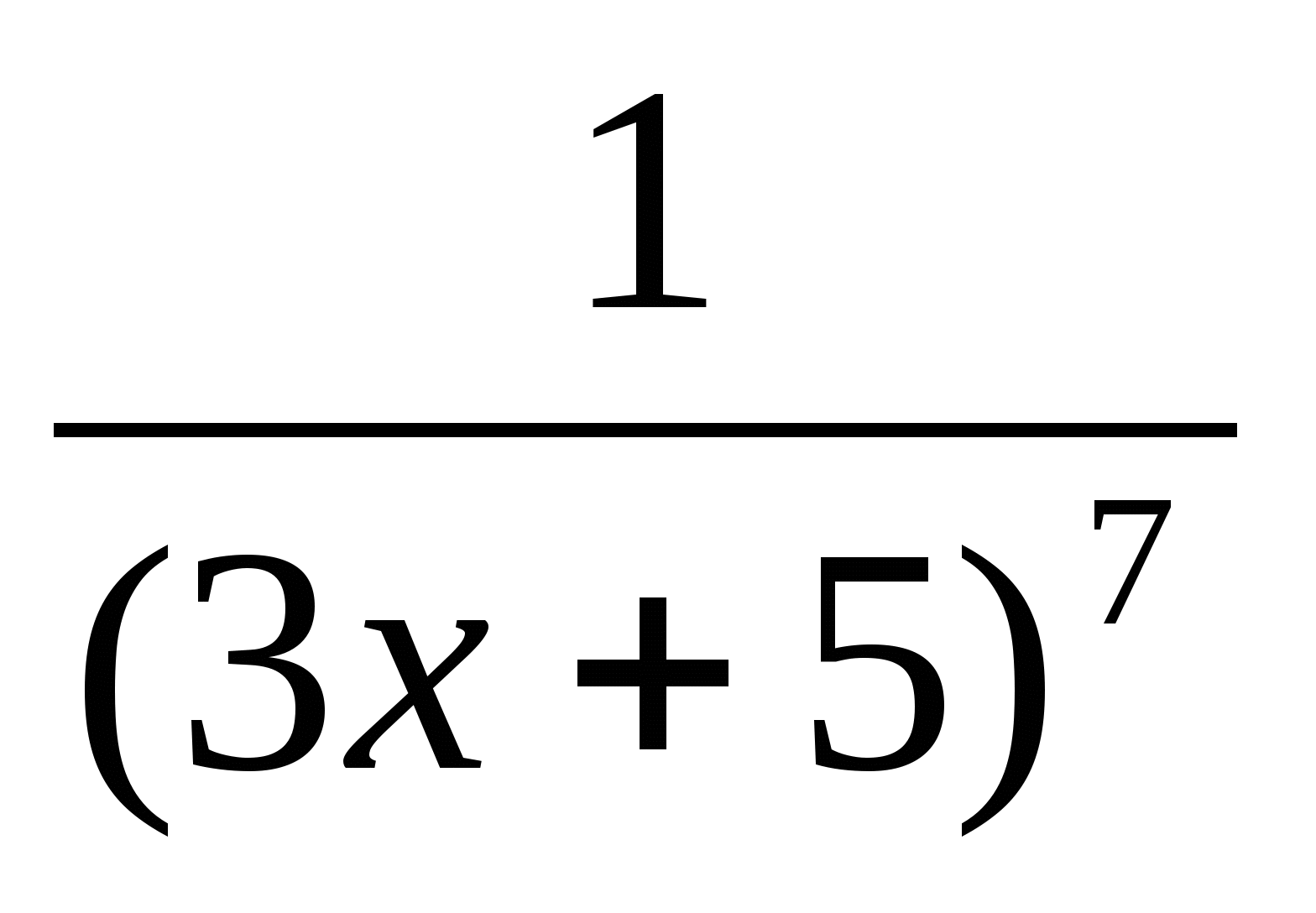
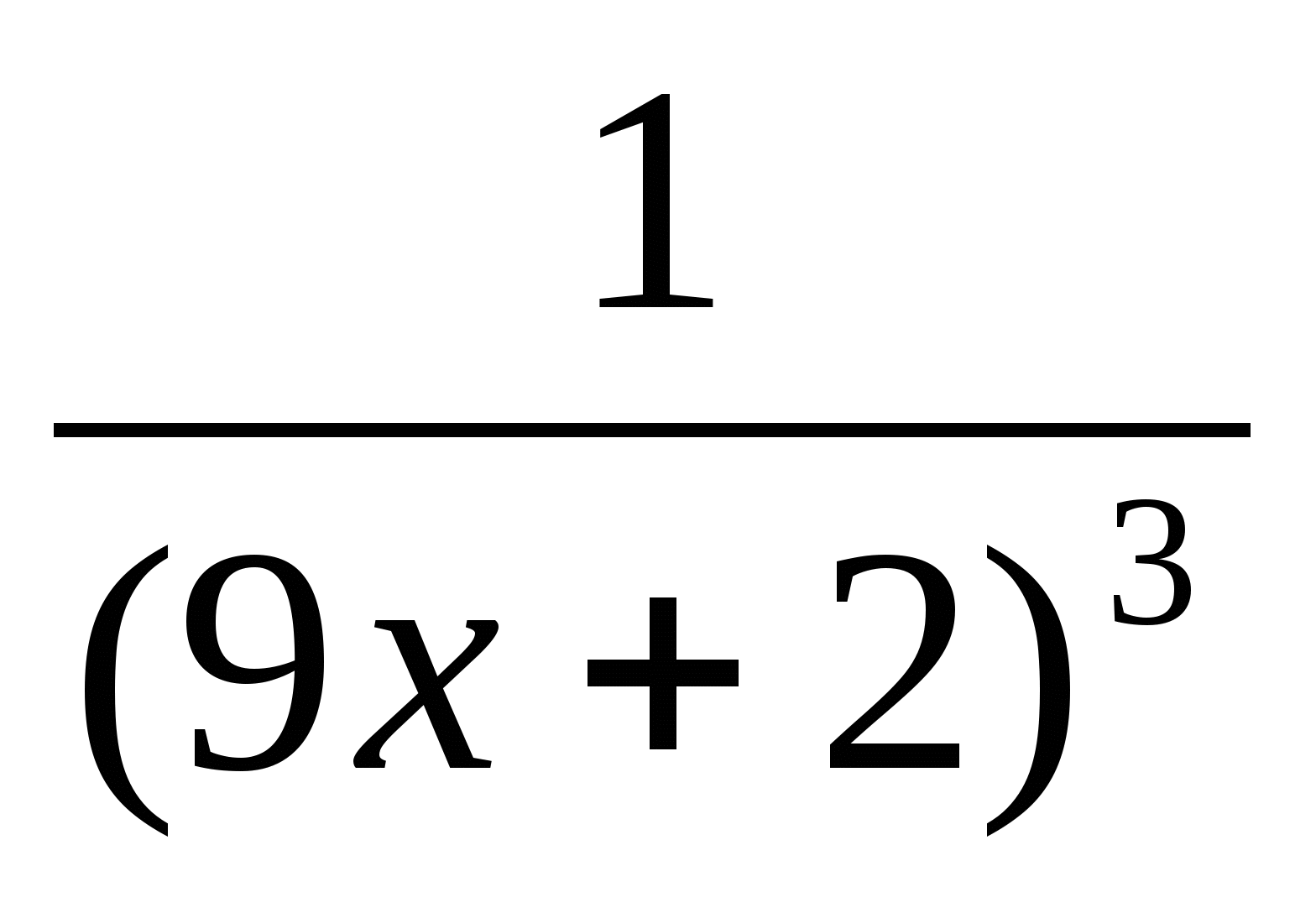
5)

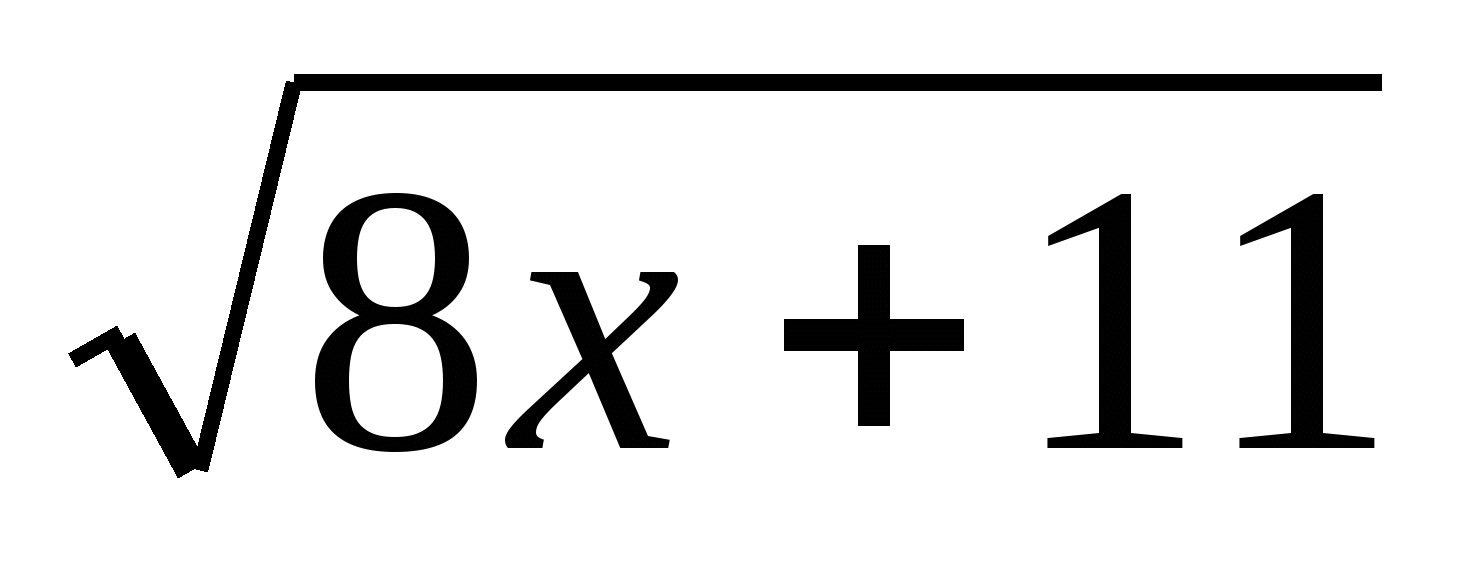


6)

**Упражнения**

Найти производную функцию:

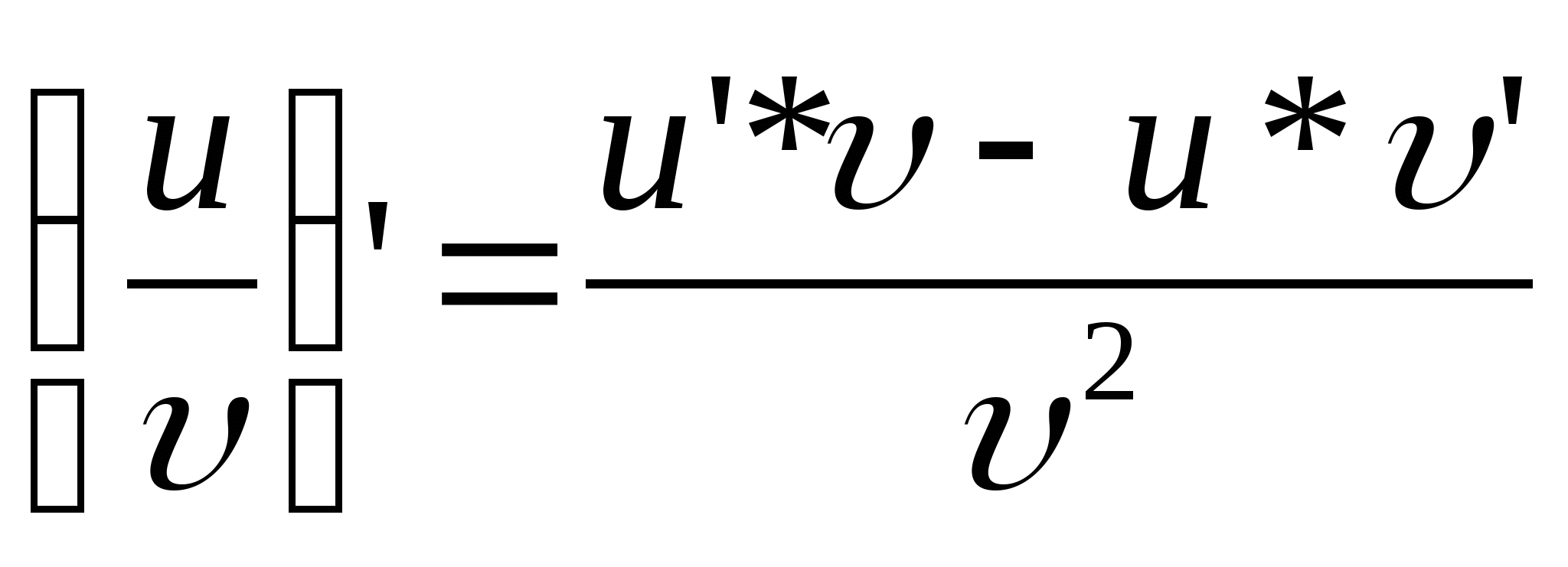
1)(12х-7)102)(8х+3)53) 4)

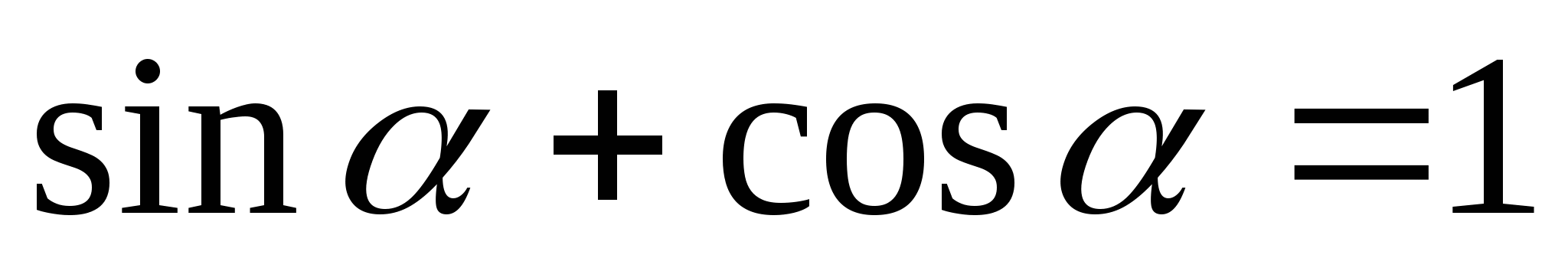
5)

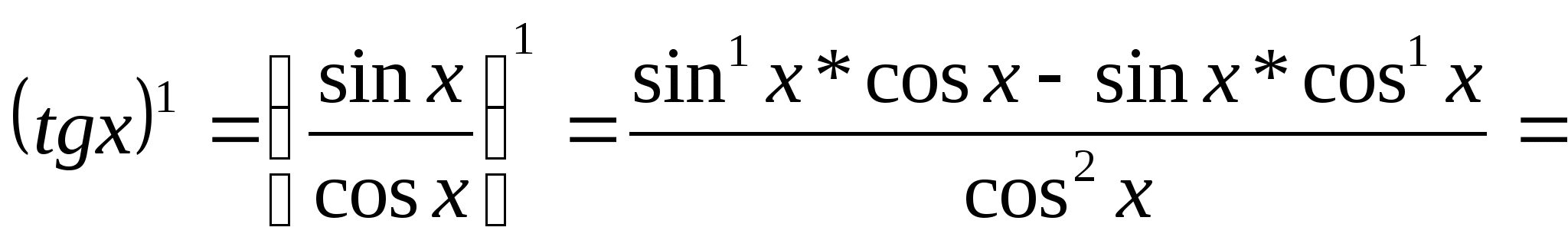
**Тема 5. Производные тригонометрических функций**

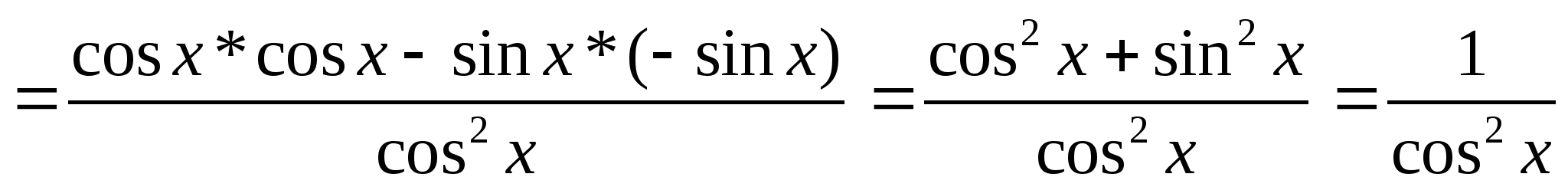
(sin x)’ = cos x

(cos x)’= - sin x

Выведем формулы производных tg x и ctg x. Для этого будем применять две данные формулы и вспомогательные:  и

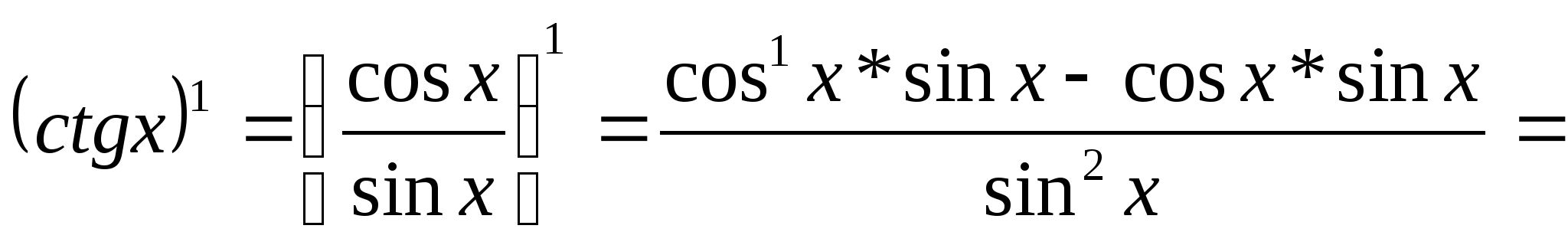
основное тригонометрическое тождество: .

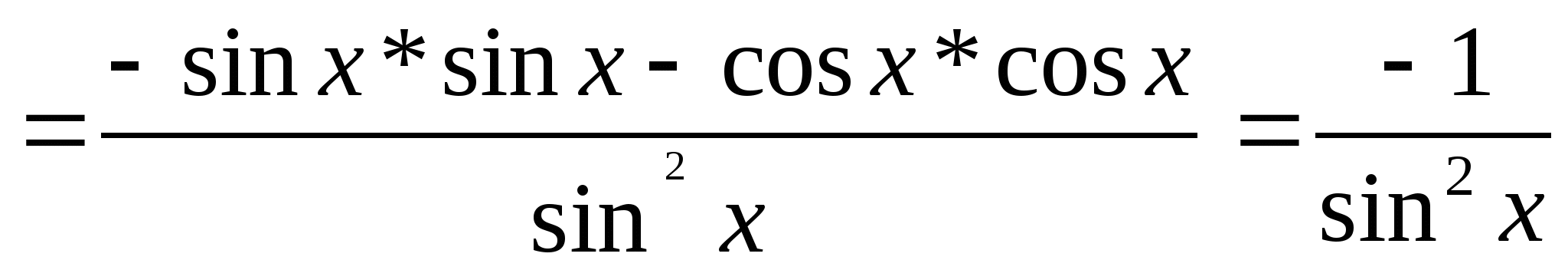
1) 



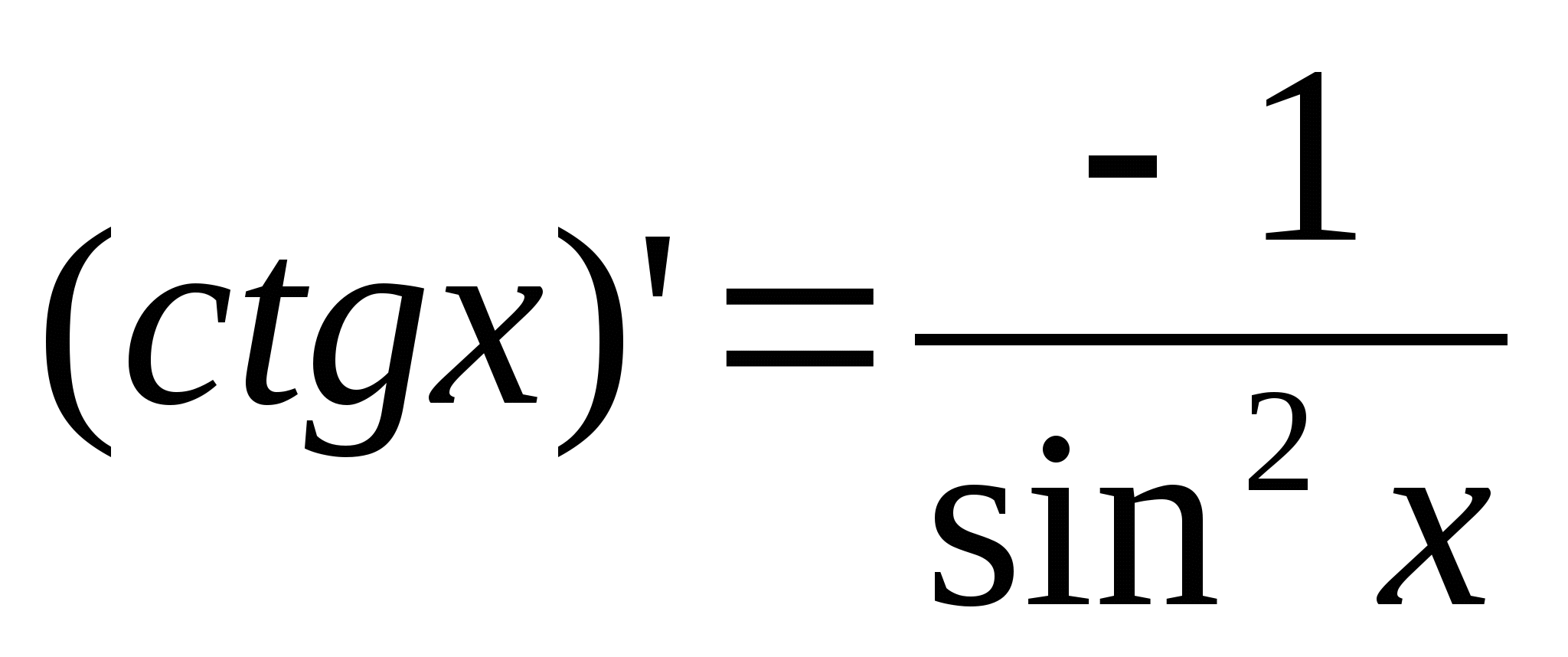
Получили формулу производной тангенса:



2) 



Получили формулу производной котангенса:

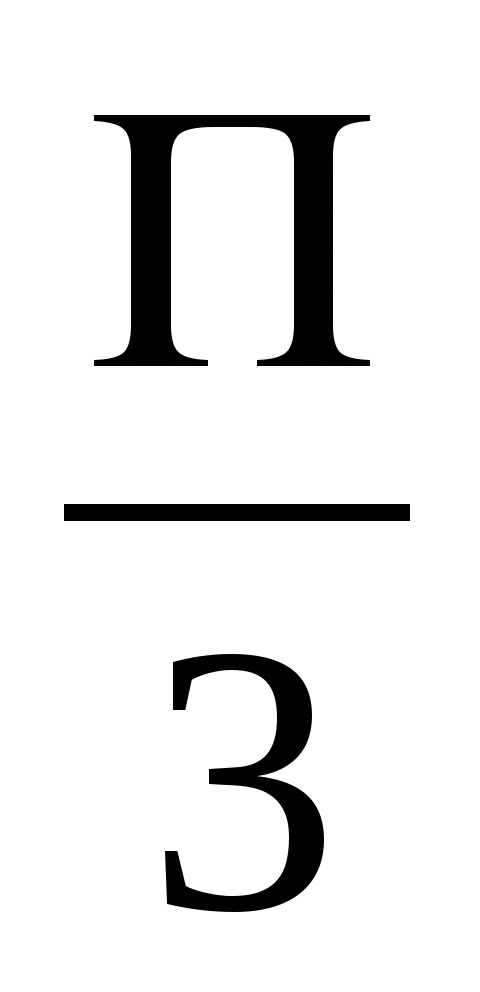
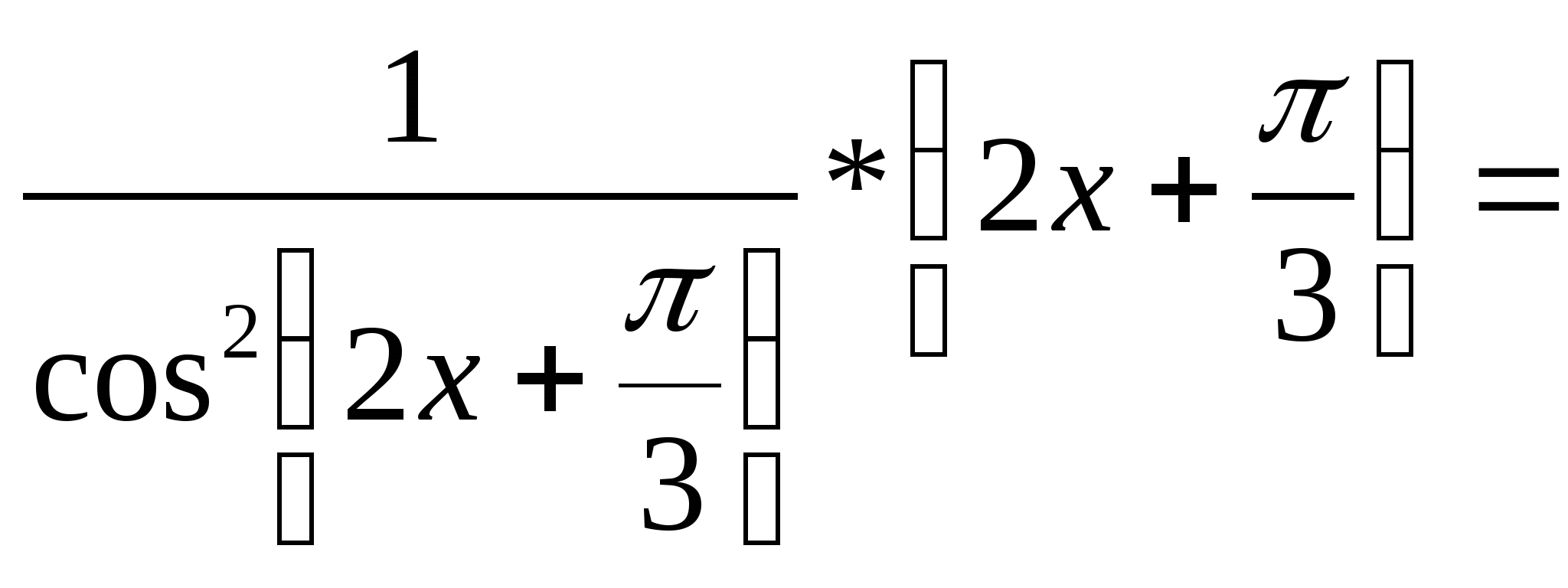


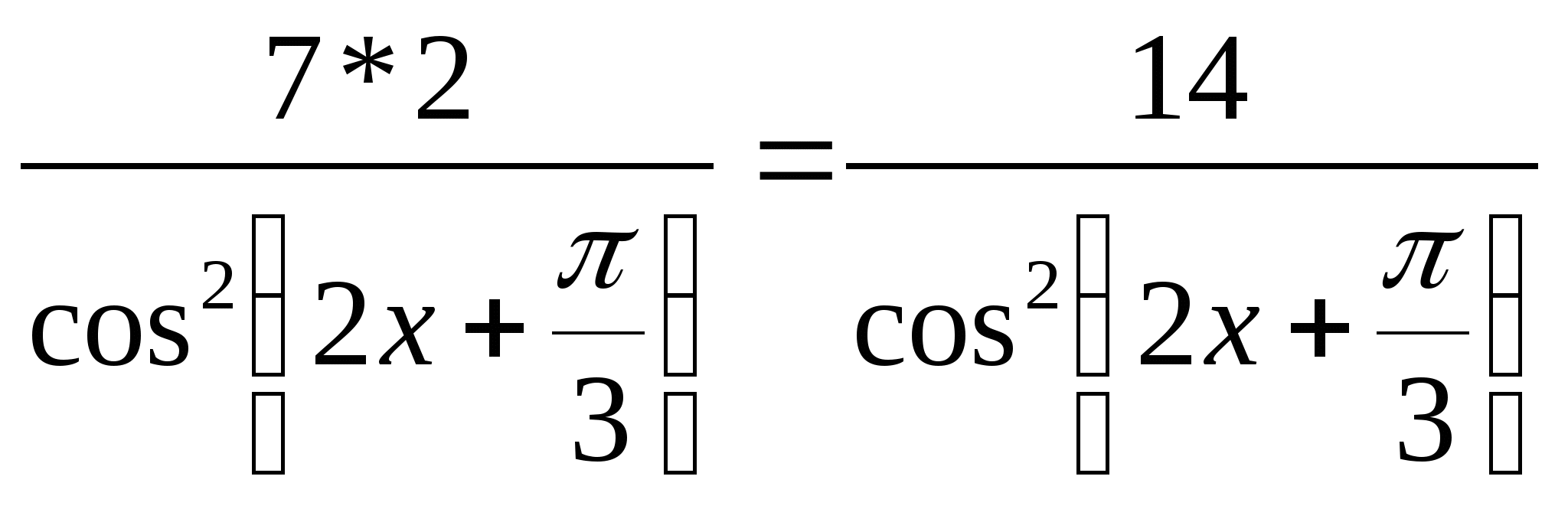
**Примеры:**

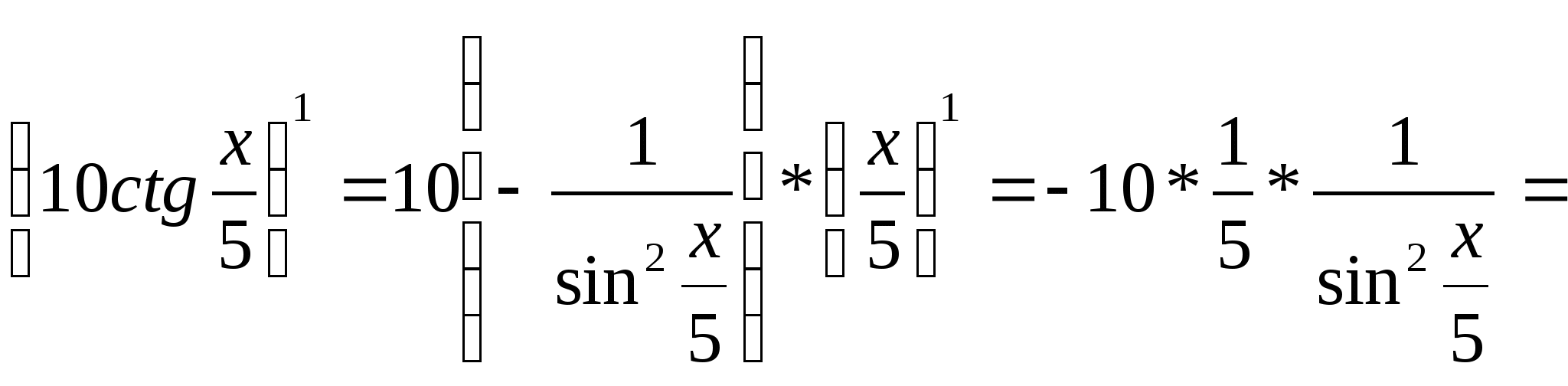
Найти производную функции:

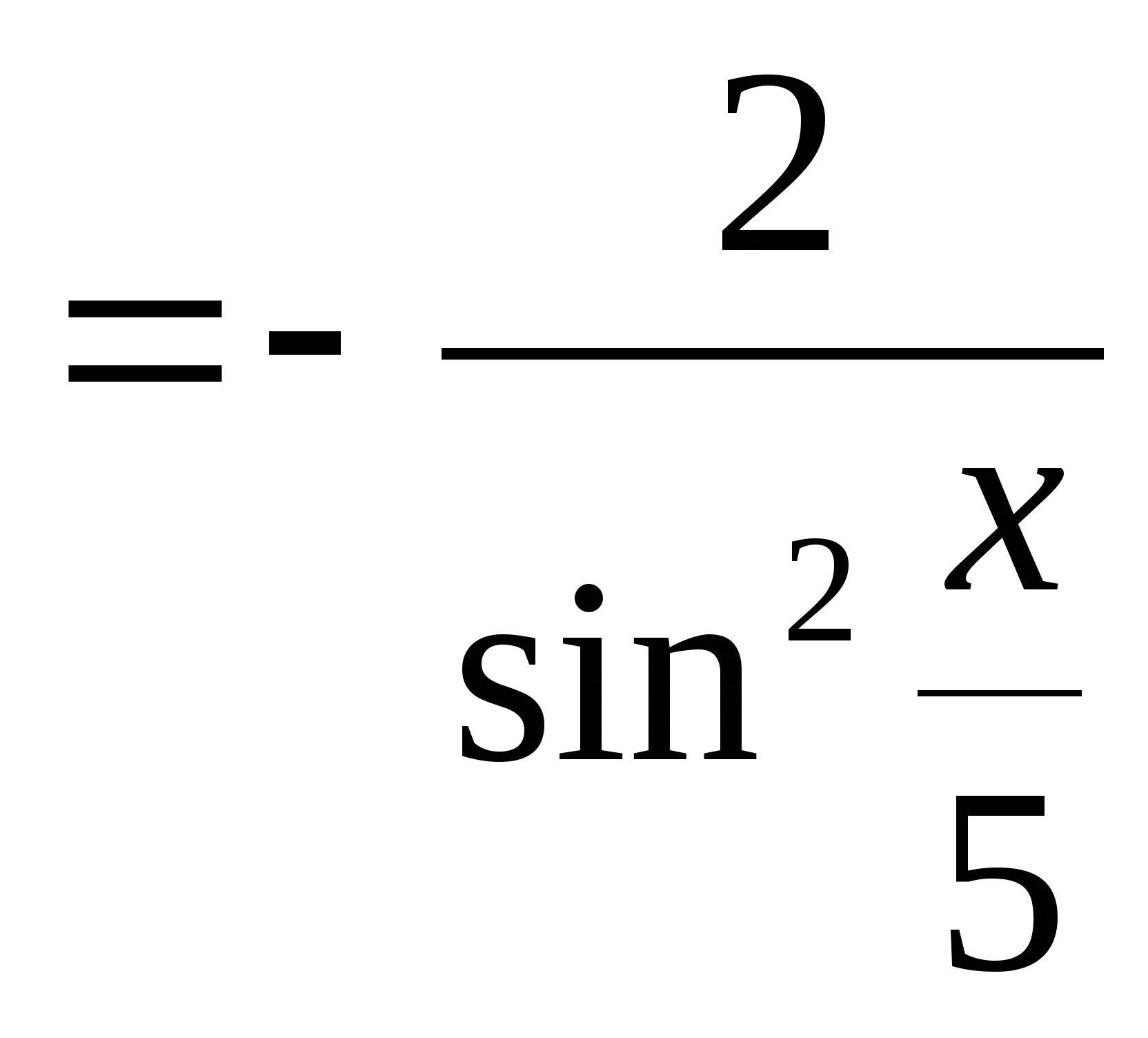
1) (sin3x)1 =cos3x\*(3x)1= cos3x\*(3\*1)= 3cos3x;

2) ( 2 cos5x)1= 2(-sin5x)\*(5x)= -10sin5x;

3)(7tg(2x+))1= 7\*



4) 



**Тема 6. Геометрический смысл производной**

I. Повторение

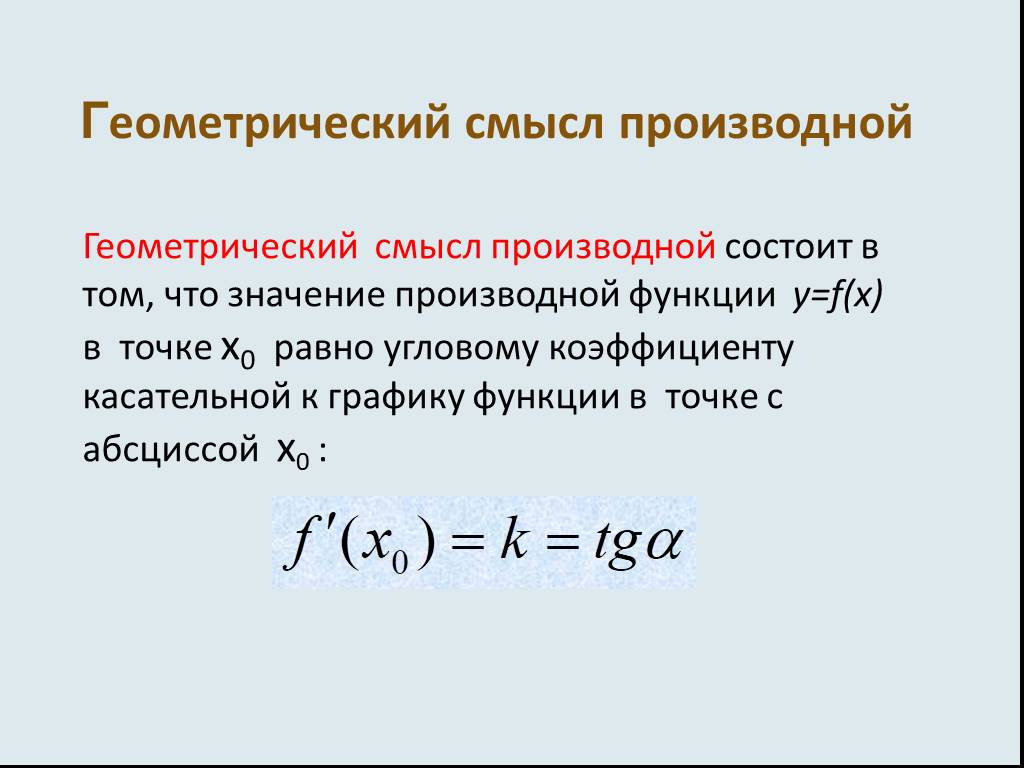
1) Касательная к окружности- это прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.

2) Общий вид уравнения прямой у = Кх + в, где К и в – постоянные числа.

II. Новый материал.

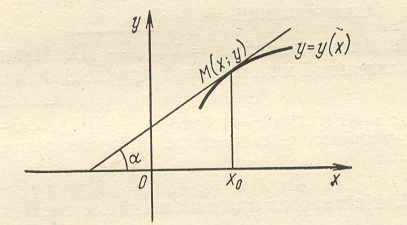
Производная функции у = у(х) при данном значении аргумента х = хо равна *угловому коэффициенту касательной*, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой хо :

**У’ (хо) = tg а,**



*Уравнение касательной* к графику функции у = у(х) в точке Mo(xo', уо) имеет вид

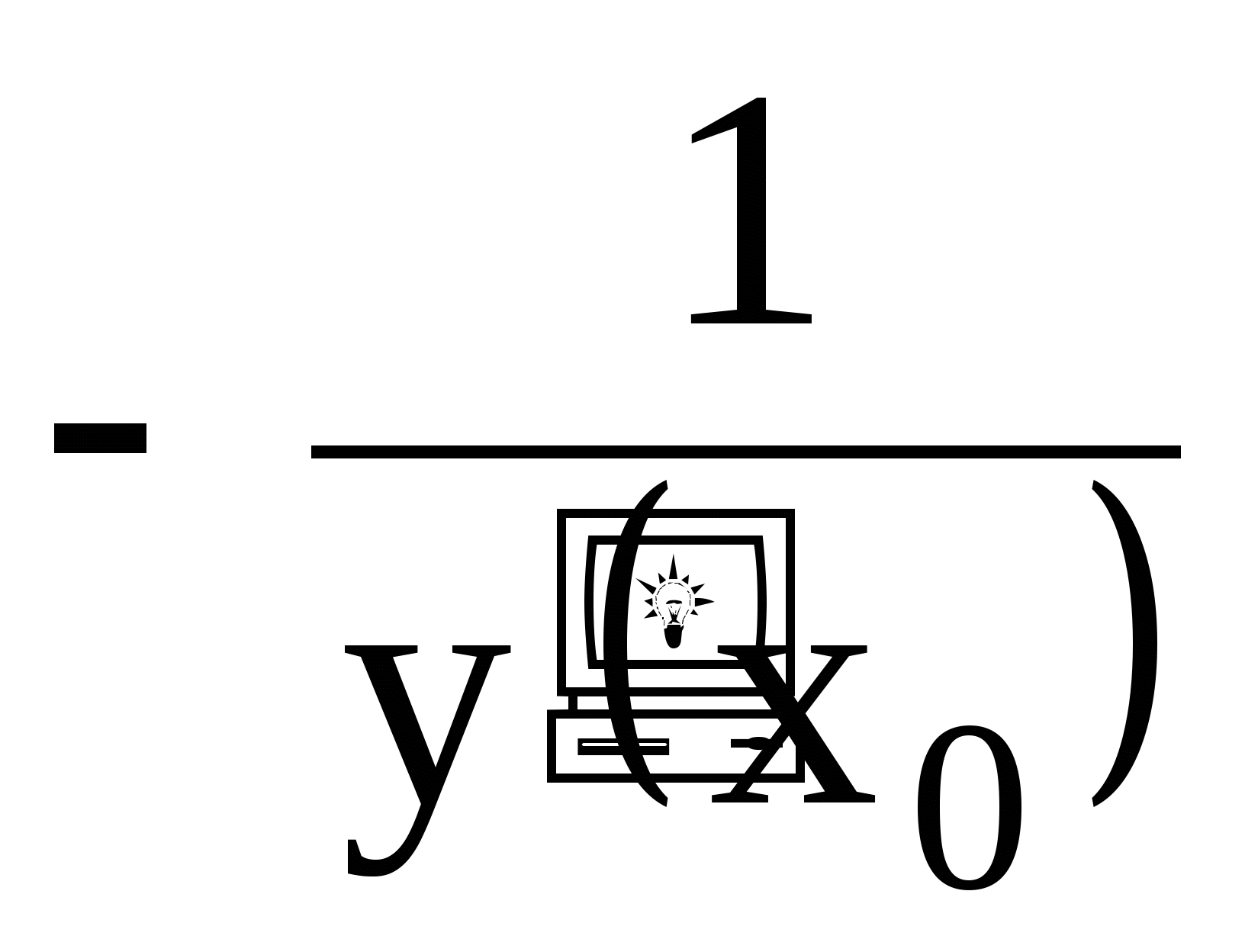
**у — уо= у'(хо)(х — х0),**



Если у(х) имеет при х = х0 бесконечную производную, .то.— уравнение касательной таково:

**х= хо.**

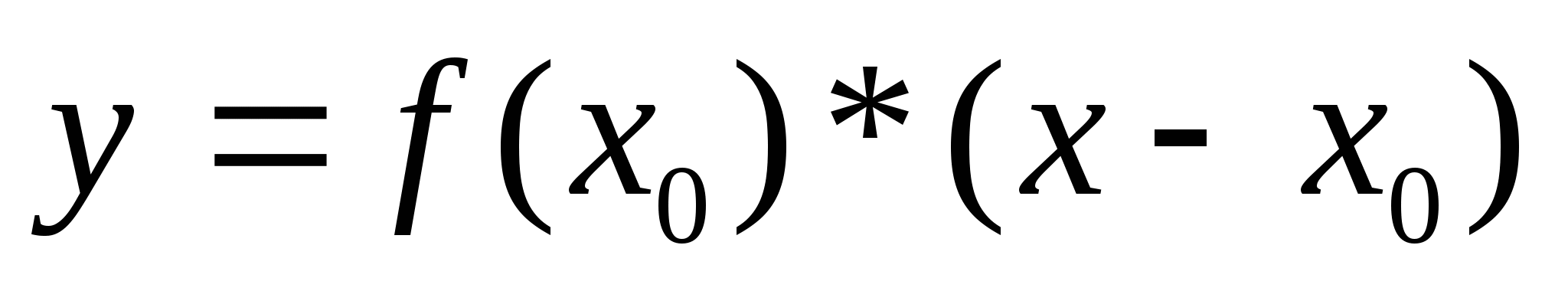
Уравнение нормали, т. е. прямой, проходящей через точку касания Мо(xo; уо) перпендикулярно касательной, записывается в виде

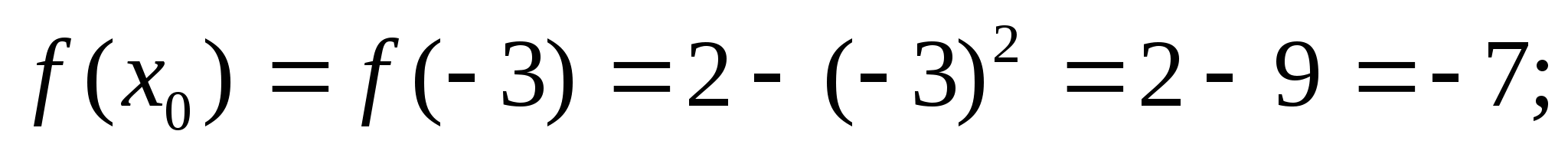
**у — уо= (х — х0),**

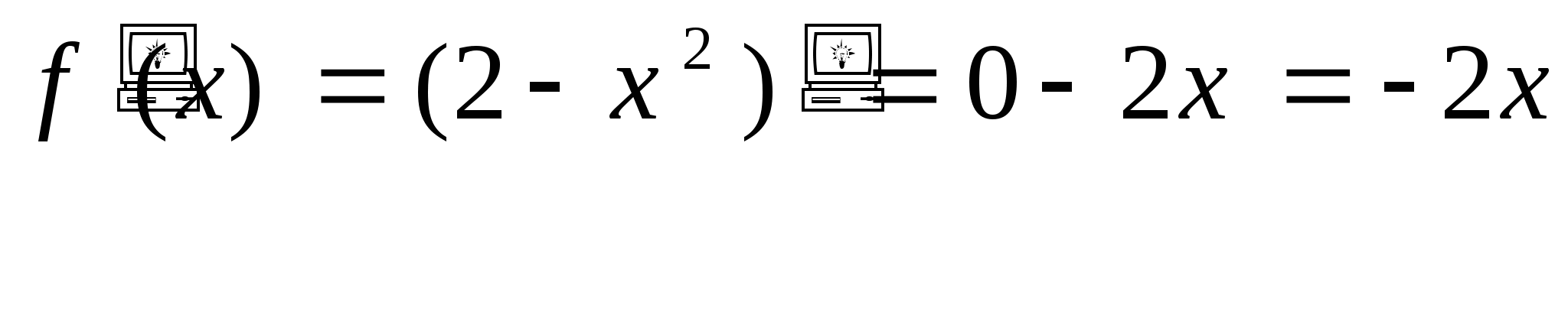
**Пример 1**.

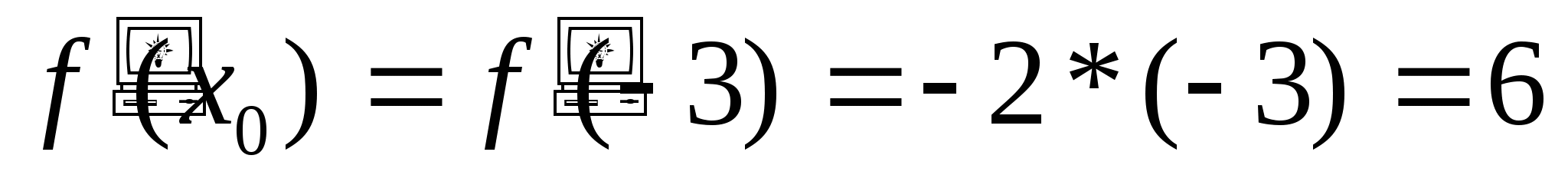
Написать уравнение касательной к графику функции f(x)=2-x2 в точке с абсциссой х0= -3. Выполнить рисунок.

Решение:

- формула уравнения касательной.

1) 

2) 

3) 

Подставим полученные значения и х0= -3 в формулу уравнения касательной, а затем упростим полученное выражение

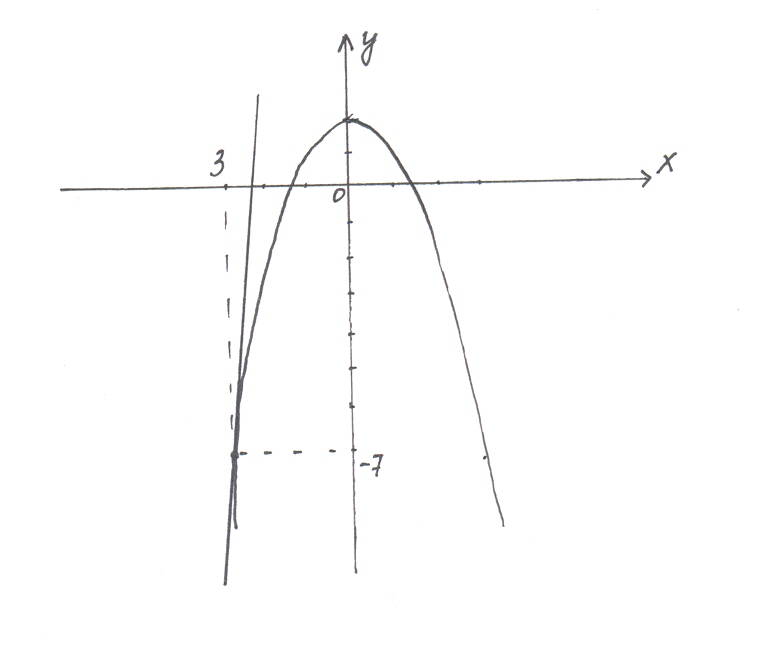
У = -7+6(х+3)

У = -7+6х+18

У = 6х+11 – уравнение касательной.

А теперь построим график данной функции f(x)=2-x2 и прямую Y=6x+11. Составим для этого таблицы.

f(x)=2-x2Y=6x+11



Мы видим, что функции и прямая, уравнение которой мы получим, имеют одну общую точку А, у которой абсцисса х0= -3.

**Пример 2**. Составить уравнения касательной и нормали к параболе у = 2х2— 6х + 3 в точке М, (1; — 1).

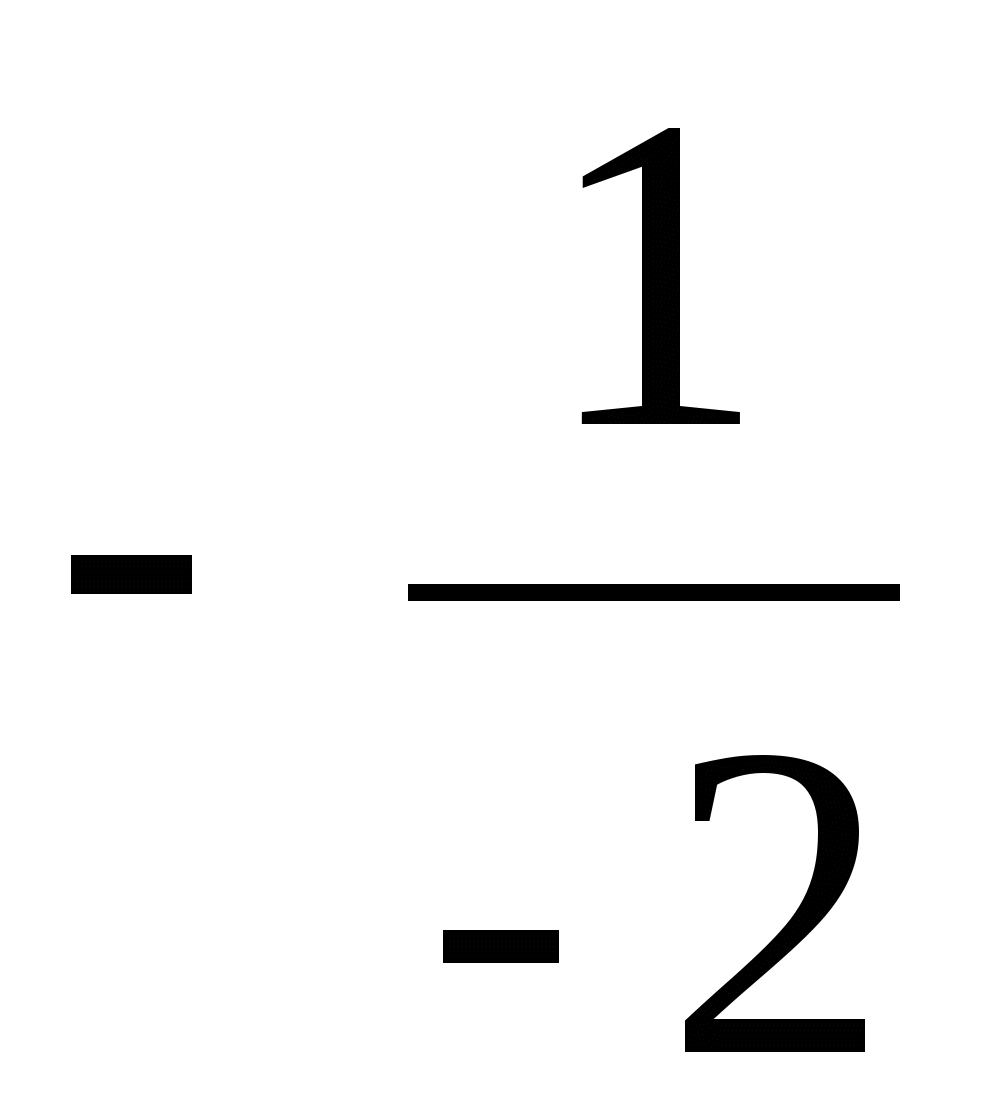
Р е ш е н и е. Найдем производную функции у = 2х2— бх+ 3 при х = 1.

Имеем у'= 4х — 6, откуда у'(1) = = — 2.

Воспользовавшись уравнением касательной, получим искомое.

у - (- 1) = - 2(х — 1) или 2х +у – 1 = 0

а уравнение нормали –

у — (- 1)= (х — 1) или х – 2у – 3 = 0

**Тема 7. Механический (физический) смысл производной**

Производная у’(х0)от функции у = у(х), вычисленная при значении аргумента х = х0, представляет собой *скорость изменения этой функции* относительно независимой переменной х в точке х = х0.

В частности, если зависимость между пройденным путем s и временем t при прямолинейном движении выражается формулой s = s(t), то скорость движения в любой момент времени t есть v = s’(t), а ускорение ( т.е. скорость изменения скорости движения) есть a = v’(t) = s’’(t).

*Формулы:*

 S1(t) *скорость – это производная расстояния.*

а (t) – *ускорение – это производная скорости.*

