Лекция 4. Методы интегрирования. Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «подведения под знак дифференциала»):

*du*=*d*(*u+a*),

*du*  1 *d* (*au*),

*a*

*du*  1 *d* (*au*  *b*),

*a*

*a* – число,

*a*  0  число,

*a*  0, *b*  числа,

*udu*  1 *d* (*u*2 ), *undu* 

2

1

*n*  1

*d* (*un*1),

cos*udu*=*d*(sin*u*), sin*udu*= – *d*(cos*u*),

1 *du*  *du*  *d* (ln *u*),

*u u*

*eudu*  *deu* , *audu*  *d* (*au* ) ,

ln *a*

1

1 *du* 

cos2 *u*

*du*

cos2 *u*

 *d* (tg *u*) ,

1 *du* 

1 *u*2

*du*

1 *u*2

 *d* (arctg*u*) .

Вообще, формула

*f* (*u*)*du*  *d* ( *f* (*u*))

очень часто используется при подведении под знак дифференциала.

Примеры**:**

1) ∫ (3*x*  2)26

*dx*  1 (3*x*  2)26

3

∫

1 (3*x*  2)27

*d* (3*x*  2) 

3 27

* *C*,

(использовалась формула 1 таблицы интегралов).

 1 *x*

1 4 

1 *x*

*dx dx*

2) ∫ 3

 *x*  2  cos2 (3*x*)  *dx*  ∫3

*dx*  ∫ *x*  2  4∫ cos2 (3*x*) 

 

1 *x*

*d* (*x*  2) 4 *d* (3*x*) 31 *x* 4

 ∫3

*d* (1 *x*) ∫

 ∫ 2  

*x*  2 3 cos (3*x*)

ln 3

 ln *x*  2  tg(3*x*)  *C*,

3

(использовались формулы 2, 3, 9).

3) ∫ *dx* 

9  2*x*2



2



(3)2  ( 2  *x*)2

1 ∫ *d* ( 2  *x*) 

1. arcsin 2  *x*  *C*,

3



2

(использовалась формула 13).

4) ∫ *dx*  ∫ *dx*  ∫ *d* (*x* 1)  ln *x* 1

5  2*x*  *x*2

4  (*x* 1)2

22  (*x* 1)2

5  2*x*  *x*2

* + *C*,

(использовалась формула 14).

5) ∫ tg *u du*  ∫ sin *u du*  ∫ *d* (cos *u*)  ln cos *u*  *C*,

cos *u* cos *u*

(вывод формулы 7).

cos2 *u*  sin2 *u*

cos2 *u*

sin2 *u*

6) ∫ *du*  ∫ 2 2 *du*  ∫ 2 *du* ∫ 2 *du* 

sin *u*

*u u u u u u*

2 sin cos 2 sin cos 2 sin cos

2 2 2 2 2 2

*u u u u u u*

sin *u*

2

cos *u*

2

*u*

2

 ∫ ctg 2*d* ( 2 )  ∫ tg 2*d* ( 2)  ln sin 2  ln cos 2  *C*  ln

* + *C*  ln tg
  + *C*,

(вывод формулы 11).

Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). При этом заданный интеграл должен приводиться к новому интегралу, который будет табличным или к нему сводящимся. Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл

∫ *f* (*x*)*dx* . Сделаем подстановку

*x*  (*t*) , где

(*t*)  функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда

*dx*  (*t*)*dt*

и на основании свойства инвариантности формулы

интегрирования неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования подстановкой

∫ *f* (*x*)*dx*  ∫ *f* ((*t*)) (*t*)*dt*

(1)

Формула (1) также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования *t* назад к переменной *x*.

Иногда, когда функция

*f* (*x*)

представляется в виде

*f* ( *x*)  *g* (( *x*))  ( *x*)

целесообразно подбирать подстановку в виде *t*  ( *x*) , тогда

∫ *f* (*x*)*dx*  ∫ *g*((*x*)) (*x*)*dx*  ∫ *g*(*t*)*dt*

Другими словами, формулу (8.4) можно применять справа налево.

Примеры**.**

1. Найти

∫ *x*  (*x*  3)50 *dx*.

Пусть *x* + 3 = *t*, тогда *x* = *t* – 3, *dx* = *dt*. Имеем

50 50 51 50

*t*52

*t*51

∫ *x*  (*x*  3)

*dx*  ∫ (*t*  3)  *t dt*  ∫ *t dt*  3∫ *t dt*  52  3 51  *C* 

(*x*  3)52 (*x*  3)51

   *C*.

52 17

1. Найти

∫ *x*  3 *x*  5*dx*.

Пусть

3 *x*  5

 *t*,

тогда

*x*  *t*3  5,

*dx*  3*t*2*dt*.

Имеем

3 3 2 6 3

*t*7 *t*4

∫ *x* 

*x*  5*dx*  ∫ (*t*

 5)  *t*  3*t dt*  3∫ *t dt* 15∫ *t dt*  3 7

15  *C* 

4

 3 (*x*  5)7 3  15 (*x*  5)4 3  *C*.

7 4

1. Получить формулу ∫ *du*  ln *u* 

*u*2  *a*2

*u*2  *a*2

* *C*.

Обозначим *t*   *u* (подстановка Эйлера). Тогда

*u*2  *a*2

*dt* 

2 *u*2  *a*2

2*u du*  *du* 

*du*.

Отсюда

*u*  *u*2  *a*2

*u*2  *a*2

*du*  *dt*

*u*2  *a*2

*u*2  *a*2  *u*

 *dt* .

*t*

Таким образом,

∫ *du*  ∫ *dt*  ln *t*  *C* ln *u* 

*u*2  *a*2

*u*2  *a*2

*t*

* + *C*.

Метод интегрирования по частям

Пусть *u* = *u*(*x*) и *v* = *v*(*x*) – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда

*d*(*uv*) = *udv* + *vdu*. Интегрируя это равенство, получим

∫ *d* (*uv*)  ∫ *udv*  ∫ *vdu*

или

∫*udv*  *uv*  ∫ *vdu*

(2)

Полученная формула называется формулой интегрирования по частям*.* Она дает

возможность свести вычисление интеграла

∫ *udv*

к вычислению интеграла

∫ *vdu* , который

может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей *u* и *dv* (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения *v* и *du*, используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида

∫ *P*(*x*)*ekxdx* ,

∫ *P*(*x*)*akxdx* ,

∫ *P*(*x*) sin *kxdx* ,

∫ *P*(*x*) cos *kxdx* , где

*P*(*x*) – многочлен, *k* – число. Удобно положить *u* = *P*(*x*), а за *dv* обозначить все остальные

сомножители. Формула (8.5) применяется один раз, если многочлен

*P*(*x*)

первой степени,

в противном случае каждое применение формулы (8.5) понижает степень многочлена

*P*(*x*) на единицу.

1. Интегралы вида

∫ *P*(*x*) arcsin *kxdx*,

∫ *P*(*x*) arccos *kxdx*,

∫ *P*(*x*) arctg *kxdx*,

∫ *P*(*x*) arcctg *kxdx*,

сомножители.

∫ *P*(*x*) ln *xdx*. Удобно положить *P*(*x*)*dx* = *dv*, а за *u* обозначить остальные

1. Интегралы вида

∫ *eax* sin *bxdx*,

∫ *eax* cos *bxdx*,

где *a* и *b* – числа. За *u* можно

принять любую из функций

*u*  *eax* ,

*u*  sin *bx*

или

*u*  cos *bx* . Данные интегралы

относятся к тому типу интегралов, вычисление которых приводит к исходному интегралу, после чего исходный интеграл может быть выражен из полученного уравнения (см. пример 4).

Примеры**.**

1. Найти ∫ (3*x* 1)*e*2*xdx* .

*u*  3*x* 1 ⇒ *du*  3*dx* 

Пусть 

∫

2*x*

2*x* 1

2*x*  (можно положить С=0). Следовательно, по

*dv*  *e dx* ⇒ *v*  *e dx*  *e* 

 2 

формуле интегрирования по частям:

2*x* 1 2*x*

1 2*x* 1

2*x* 3 2*x*

∫ (3*x* 1)*e dx*  (3*x* 1) 2 *e*

 ∫ 2 *e*

3*dx*  (3*x* 1)*e*  *e*

2 4

* *C*.

1. Найти ∫ *x*2 cos(*x* 1)*dx* .

*u*  *x*2 ⇒ *du*  2*xdx* 

Пусть

  . Поэтому

*dv*  cos(*x* 1)*dx* ⇒ *v*  ∫ cos(*x* 1)*dx*  sin(*x* 1)

∫ *x*2 cos(*x* 1)*dx*  *x*2 sin(*x* 1)  2∫ *x* sin(*x* 1)*dx*.

Для вычисления интеграла

∫ *x* sin(*x* 1)*dx*

снова применим метод интегрирования по

частям:

*u*  *x* ⇒ *du*  *dx*



. Тогда

*dv*  sin(*x* 1)*dx* ⇒ *v*   cos(*x* 1)

 

∫ *x*2 cos(*x* 1)*dx*  *x*2 sin(*x* 1)  2*x* cos(*x* 1)  2∫ cos(*x* 1)*dx* 

 *x*2 sin(*x* 1)  2*x* cos(*x* 1)  2 sin(*x* 1)  *C*.

1. Найти ∫ *x* arctg *xdx*.

*u*  arctg *x* ⇒ *du*  1 *dx*

 1 *x*2 

Пусть

  . Поэтому,

 *x*2 

*dv*  *xdx* ⇒ *v*  

 2 

*x*2 1 *x*2 *x*2 1 (*x*2 1) 1

∫ *x* arctg *xdx* 

1. arctg *x*  2 ∫1 *x*2 *dx* 

2 arctg *x*  2 ∫

1 *x*2

*dx* 

 *x* arctg *x*  1 (1 1 )*dx* 

∫

2

2 2 1 *x*2

*x*2 1 1

arctg *x*  *x*  arctg *x*  *C*.

2 2 2

1. Найти

*I*  ∫ *e*2*x* cos *xdx* .

Будем применять формулу (2) непосредственно, подводя под дифференциал экспоненту. Имеем

*I*  *e*2*x* cos *xdx*  1 cos *xde*2*x*  1 *e*2*x* cos *x*  1 *e*2*xd* cos *x* 

∫ ∫ ∫

2 2 2

 1 *e*2*x*

2

cos *x*  1 *e*2*x*

2

∫

sin *xdx*.

Применим формулу (2) еще раз, подводя под дифференциал снова экспоненту. Получим

1 2 *x* 1

2*x* 1 2*x*

1 2*x*

1 2*x*

*I*  *e*

2

cos *x*  4 ∫sin *xde*

 *e* cos *x*  *e*

2 4

sin *x*  4 ∫ *e d* sin *x* 

 1 *e*2*x*

2

1

cos *x*  *e*

2*x*

4

sin *x*  1 *e*2*x*

4

∫

1

cos *xdx*  *e*

2 *x*

2

1

cos *x*  *e*

2*x*

4

1

sin *x*   *I*.

4

Итак, мы получили уравнение относительно неизвестного интеграла *I*:

*I*  1 *e*2 *x* cos *x*  1 *e*2*x* sin *x*  1  *I* .

2 4 4

Выражая из этого уравнения *I*, получим

*I*  2 *e*2*x* cos *x*  1 *e*2*x* sin *x* .

5 5