ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ **8**

Приложения определённого интеграла

1. Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции

*y*  *f* (*x*)

 *f* (*x*)  0, осью *Ox* , прямыми

*x*  *a*

и *x*  *b*

вычисляется по

формуле

*b*

*S*  ∫ *f* (*x*)*dx* . Если криволинейная трапеция расположена ниже оси

*a*

*Ox* ( *f* (*x*)  0 ), то её площадь определяется так: можно объединить в одну:

*b*

*S*  ∫ *f* (*x*)*dx* .Эти формулы

*a*

*b*

*S*  ∫

*a*

*f* (*x*) *dx* . (1)

Площадь фигуры, ограниченной кривыми

*y*  *f*1(*x*) и

*y*  *f*2 (*x*),

прямыми *x*  *a* и *x*  *b*

образом:

*b*

при условии *f*2 (*x*)  *f*1(*x*) можно найти следующим

*S*  ∫ *f*2 (*x*) 

*a*

*f*1(*x*)*dx* . (2)

Если кривая задана параметрическими уравнениями

*x*  *x*(*t* ) ,

*y*  *y*(*t*) ,

то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми

*x*  *a* ,

*x*  *b*

и осью *Ox* , выражается формулой

*t*2

*S*  ∫ *y*(*t*) *x*(*t*) *dt* , (3)

*t*1

где

*t*1 и *t*2

определяются из равенств

*a*  *x*(*t*1)

и *b*  *x*(*t*2 )

[ *y*(*t*)  0

при

*t*1  *t*  *t*2 ].

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в

полярных координатах уравнением

(    ), вычисляется по формуле

*r*  *r*()

и двумя лучами

   ,

  

1  2

*S*  2 ∫ *r*



() *d*. (4)

1. Вычисление длины дуги кривой.

Длина *l* кривой, являющейся графиком непрерывно

дифференцируемой функции формуле:

*y*  *f* (*x*) , где

*a*  *x*  *b* , вычисляется по

*b*

*l*  ∫

*a*

1  ( *f* (*x*))2 *dx* . (5)

При параметрическом задании кривой

*x*  *x*(*t* ) ,

*y*  *y*(*t*)

[ *x*(*t*) и

*y*(*t*) –

непрерывно дифференцируемые функции], где находится по формуле

*t*1  *t*  *t*2 , длина дуги

*t*2

*l*  ∫

*t*1

(*x*)2  ( *y*)2 *dt* . (6)

Если кривая задана уравнением координатах, то длина дуги равна

*r*  *r*() ,

    

в полярных



*l*  ∫



*r* 2  *r*2 *d* . (7)

1. Вычисление объёма тела.

Объём *V* тела, площади сечений которого плоскостями,

перпендикулярными оси *Ox* известны ( *S*  *S* (*x*),

формуле:

*a*  *x*  *b* ), вычисляется по

*b*

*V*  ∫ *S* (*x*)*dx* . (8)

*a*

Если вокруг оси *Ox* вращается криволинейная трапеция, ограниченная

непрерывной линией

*y*  *f* (*x*)  0 , отрезком

*a*  *x*  *b*

и прямыми

*x*  *a* и

*x*  *b* , то объём тела вращения равен *V*

*b*

   ∫ *y*2*dx* .

*a*

Примеры решения задач

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой *y*  sin *x* , прямыми

*x*   7  ,

6

*x*   ,

4

*y*  0 .

Решение**.**

Фигура имеет вид, представленный на рис.1. Её площадь определяется по формуле (1):

 

4  0 4

*S*  ∫ sin *x dx*  ∫sin *xdx*  ∫sin *xdx*  ∫sin *xdx* 

 7 

6

 7   0

6

 0 1

3

2

3

 2) .

0



 cos *x*

 7 

6

* cos *x*   cos *x* 4

 1 

 1  1 

2

 1 

2

(8 

2

 

Рис. 1. Рис. 2.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

*y*  *x*2  5*x*  6 .

Решение**.**

*y*  *x*2  6 и

Найдём абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений

 *y*  *x*2  6



 *y*  *x*2

,

 5*x*  6

из которой находим:

*x*1  0,

*x*2  2,5 . Искомую площадь (см. рис. 2)

определяем по формуле (2):

2,5

*S*  ∫

0

(*x*2

 5*x*  6  *x*2

 6) *dx* 

2,5

∫

0

(2*x*2

* 5*x*) *dx* 

125 .

24

1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной одной аркой

циклоиды (рис. 3) с уравнением

Решение**.**

*x*  2(*t*  sin *t* ) ,

*y*  2(1  cos*t*)

и осью *Ox* .

Здесь

*x*(*t*)  2(1  cos*t* ) , а *t* изменяется от

*t*1  0

до *t*2  2 .

Следовательно, по формуле (3)

2

*S*  ∫

0

2

22 (1  cos*t*)2 *dt*  4 ∫

0

(1  2cos*t*  cos2 *t*)*dt* 

2 1  cos 2*t* 

1 1  2

 4 ∫

(1  2cos*t* 

)*dt* 4   *t*  2sin *t*  *t*  sin 2*t* 

2 2 4

 12.

0   0



Рис. 3. Рис. 4.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой

Решение**.**

*r* 2  2cos 2.

Четвёртой части искомой площади (рис. 4) соответствует изменение 

от 0 до  4 . По формуле (4) находим:

1  4  4

*S*  4 

2

∫ 2cos 2 *d*  2sin 2 0 0

 2 .

1. Вычислить длину дуги полукубической параболы

*y* 2  *x*3

( *y*  0 ) от

точки с абсциссой

*x*  0 до точки

*x*  1.

Решение**.**

Здесь

*y*  *x*3 2 . Тогда

*y*  3 *x*1 2 . Тогда по формуле (5)

2

1 9 4 2 

9 3 2 1

8 13 3 2 8

8 13 

*l*  ∫

0

1  *x dx* 

4

*  1  *x* 

9 3  4 

  

27  4 

0

  

27 27  8

13  1 .



  

Рис. 5. Рис. 6. Рис. 7.

1. Найти длину астроиды



*x*  *a* cos3 *t*

Решение**.**

:  *y*  *a* sin3 *t* .

*x*  3*a*  cos2 *t*  sin *t* , *y*  3*a*  sin 2 *t*  cos*t* . Тогда

 

( *x*)2  ( *y*)2

9*a*2 cos4 *t*  sin 2 *t*  9*a*2 sin 4 *t*  cos2 *t*

  3*a*  cos*t*  sin *t*  3*a* sin 2*t* .

9*a*2 cos2 *t*  sin2 *t*

2

Теперь по формуле (6) с учётом симметрии линии (рис. 6) находим

3*a*  2

1  2

*l*  4 

2

∫ sin 2*t dt*  6*a*  2 cos 2*t* 0 0

 6*a* .

1. Найти длину кардиоиды:

Решение**.**

*r*  *a* (1  cos).

Сначала найдём половину длины кривой, изображённой на рис. 7, по

формуле (7), учитывая, что *r*  *a* sin  :

*l*  2

2 2 2

2  ∫

0

*a* (1  cos)

* *a* sin

 *d* 

 

 ∫ *a* 2 (1  2cos  cos2 )  *a*2 sin 2  *d* *a* ∫

2  2cos

0 0

*d* 

   

4cos2 

2



2

 *a* ∫

0

*d* *a* ∫ 2cos 2 *d*  4*a*  sin

0

 4*a* .

0

Значит, *l*  8*a* .

1. Найти объём эллипсоида

Решение**.**

*x y* 2 *z* 2

 

2

*a*2 *b*2 *c*2

 1.

Рассекая эллипсоид (рис. 8) плоскостью, параллельной плоскости *Oyz*

на расстоянии *x* от неё (  *a*  *x*  *a* ), в сечении получим эллипс с уравнением

*y z* 2

2



*b*2 *c*2

 1  *x*

*a* 2

2

или

*y z* 2



(*b* 1  *x*

2

*a* 2

)2

(*c* 1  *x*

2

*a* 2

)2

2

 1.

Площадь этого эллипса равна

имеем

3



*S* (*x*)  *bc* 1 





2 

 . Поэтому, по формуле (8),

*x*

*a* 2 



*a*

*V*  *bc* ∫



1 

2 

*dx* 

*x*

2

4  *abc* .

 

*a*  *a* 

 

Рис. 8. Рис. 9.

1. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной

линиями

*x y*  6 ,

*x*  1,

*x*  4 ,

*y*  0 , вокруг оси *Ox* .

Решение**.**

Для тела, изображённого на рис. 9, находим:

4 6 2  1  4

*V*   ∫ *x* 

*dx*  36 

*x*

 36 .

1   1