ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ **1.**

Непосредственное интегрирование

Функция

*F* (*x*)

называется первообразной для функции

*f* (*x*), если

*F* (*x*) 

*f* (*x*)

или

*dF* (*x*) 

*f* (*x*)*dx* . Если функция

*f* (*x*)

имеет первообразную

*F* (*x*) , то она имеет бесконечное множество первообразных, причём все

первообразные содержатся в выражении *F* (*x*)  *C* , где *C* – постоянная.

Неопределённым интегралом от функции *f* (*x*) называется совокупность всех

её первообразных. Обозначение: ∫ *f* (*x*)*dx*  *F* (*x*)  *C* .

Свойства неопределённого интеграла *(*правила интегрирования):

1°. ∫ *f* (*x*) *dx* 

*f* (*x*)

или

*d* ∫ *f* (*x*) *dx*

*f* (*x*) *dx* .

2°. ∫ *dF* (*x*)  *F* (*x*)  *C* .

3°. ∫ *a f* (*x*) *dx*  *a* ∫ *f* (*x*) *dx* , где *a* – постоянная.

4°.

∫ *f*1(*x*) 

*f*2 (*x*)*dx*  ∫ *f*1(*x*) *dx* ∫ *f*2 (*x*) *dx* .

5°. Если ∫ *f* ( *x*)*dx*  *F* (*x*)  *C* и *u*  (*x*) , то ∫ *f* (*u*)*du*  *F* (*u*)  *C*

(инвариантность формулы интегрирования).

Таблица основных интегралов*:*

1

 *u*

1. ∫ *u du*    1  *C*

(   1) ∫ *du*  *u*  *C* .

1. *du*  ln *u*  *C* .

∫

*u*

1. ∫ sin *u du*  cos *u*  *C* .
2. ∫ cos*u du*  sin *u*  *C* .
3. ∫ sh *u du*  ch *u*  *C* .
4. ∫ ch *u du*  sh *u*  *C* .

5. ∫ *du*  tg *u*  *C* .

cos2 *u*

9 . ∫ *du*  th *u*  *C* .

ch2 *u*

6. ∫ *du*  ctg *u*  *C* . 10.

sin 2 *u*

∫ *du*  cth *u*  *C* .

sh 2 *u*

11 ∫

*audu* 

*au*

* *C*

ln *a*

∫*eu*

*du*  *eu*

 *C* .

1. ∫ *du*  1 arctg *u*  *C* .

*a*2  *u* 2 *a a*

1. ∫ *du*  1 ln *a*  *u*

* *C* .

*a*2  *u* 2

2*a a*  *u*

1. *du*  arcsin *u*  *C* .

*a*2  *u* 2

∫

*a*

1. ∫ *du*  ln *u* 

*u* 2  *a*2

*u* 2  *a*2

* + *C* .

16. ∫

17. ∫

*du*  *u* 

2

*a*2  *u* 2

*du*  *u* 

*u* 2  *a*2

2

*a*2 *u*

* + - arcsin  *C* .

*a*2  *u* 2

2 *a*

 *a* ln *u* 

*u* 2  *a*2

*u* 2  *a*2

2

2

* + *C* .

Отметим, что в приведённой таблице переменная *u* может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству 5°).

При сведении данного интеграла к табличному часто используется приём подведения функции под знак дифференциала по формуле

*f* (*u*)*du*  *d*  *f* (*u*), например,

*du*  *d* (*u*  *a*)

(здесь *a* – число),

*du*  1 *d* (*au*) *a*

( *a*  0 ),

*udu* 

1 *d* (*u* 2 ) ,

2

1. *du*  *d* (ln *u*),

*u*

cos*u du*  *d* (sin *u*)

и т. д. с тем, чтобы

далее, в соответствии со свойством 5°, воспользоваться табличными интегралами.

Примеры решения задач

* 1. Используя таблицу, найти следующие интегралы: а) ∫ *dx* ; б) ∫ *dx* ;

3 *x*

3

*x*

в) ∫ 2 *x dx* ; г) ∫ *dx* .

5  *x*2

Решение**.**

а) Воспользуемся табличным интегралом 1 (   3 ):

*dx*  *x x*3

∫

∫

*x*31

*dx*   *C* 

3

 3  1

*x*2

 2

* *C* .

б) Аналогично находим:

*dx*  3

∫ 2∫

 *x dx* 

*x*3

 3 1

*x* 2

*x*

 1

* *C*  *x* 2

 *C*   2  *C* .

 3  1  1

2 2

в) Используя табличный интеграл 11 ( *a*  2 ), находим:

∫ 2*x*

2*x*

*dx*   *C* .

ln 2

г) Подставляя *a*  в табличный интеграл 14, получим:

5

∫ *dx*  ∫ *dx*  arcsin *x*  *C* .

5  *x*2

 5 2  *x*2

5

* 1. Используя таблицу и основные свойства неопределённого интеграла,

*x*

найти интеграл а ∫ 

*x* 2 

б ∫ *x*2  3*x*  5

в ∫ *x*2

: )

г) ∫ ctg2 *x dx* .

Решение**.**

3  5



  7 *dx* ; )

*x* 

*dx* ; )

*x*2  9

*dx* ;

а) Воспользуемся свойствами 3° и 4° неопределённого интеграла, а затем табличными интегралами 11, 2, 1:

 *x* 2 

∫



.

*x dx* 5*x*

3  5



 *x*  7 *dx*  3∫ 5

*dx*  2∫ *x*

 7∫ *dx*  3  ln 5  2 ln *x*  7*x*  *C*

б) Почленно поделим числитель подынтегральной дроби на

знаменатель:

*x*2  3*x*  5

3

 *x* 2

*x*

1

 3*x* 2

* 5*x*

 1

1. . Отсюда

*x*2  3*x*  5

 3 1

 1  3

1  1

∫ *dx*  ∫  *x* 2

*x*



 3*x* 2

* 5*x*

2 *dx*  ∫ *x* 2 *dx*  3∫ *x* 2 *dx*  5∫ *x*



2 *dx* 

3 1

 *x* 2

1 1

 3  *x* 2

 5  *x*

 1 1

2

2 5

* *C*  *x* 2

3

 2*x* 2

1

 10*x* 2  *C*

3  1

2

1  1

2

 1  1 5

2

в) Преобразуем подынтегральную дробь:

*x*2

*x*2  9 

(*x*2  9)  9

*x*2  9

 1  9 .

*x*2  9

Тогда с учётом табличных интегралов 1 и 12, имеем

*x*2  9  *dx x*

∫ *x*2  9 *dx*  ∫ ****1  *x*2  9 *****dx*  ∫ *dx*  9∫ *x*2  9  *x*  3  arctg 3  *C* .





г) Используем известные формулы тригонометрии, а также табличные интегралы 6 и 1:

∫ ctg2

*x dx*  ∫

cos2 *x*

2

*dx*  ∫

1  sin 2 *x*

2

*dx*  ∫

1 *dx*  *dx*  ctg *x*  *x*  *C* .

2

∫

sin *x*

sin *x*

sin *x*

**3.** С помощью приёма подведения функции под знак дифференциала

найти интегралы: а) ∫ *dx* ; б) ∫ (3*x* 1)24 *dx* ; в) ∫ ln4 *x dx* ; г) ∫ tg *x dx* .

Решение**.**

*x*  3 *x*

а) Этот интеграл можно привести к табличной формуле 2 ( *u*  *x*  3 ):

∫ *dx*  ∫ *d* (*x*  3)  ln *x*  3  *C* .

*x*  3 *x*  3

б) Здесь относительно переменной степенной функции:

24

*u*  3*x*  1

получаем интеграл от

∫ (3*x*  1)24

1

*dx*  3  ∫ (3*x*  1)

1

*d* (3*x* 1)  

3

(3*x* 1)25

25

* *C* .

в) Поскольку

1 *dx*  *d* (ln *x*) , то имеем:

*x*

∫ ln4

*x dx x*

 ∫ ln4

*x d* (ln *x*) 

ln5 *x*

5

* *C* .

г) Так как sin *x dx*  *d* (cos *x*) , то

∫ tg *xdx*  ∫ sin *x dx*  ∫ *d* (cos *x*)  ln cos *x*  *C* .

cos *x* cos *x*