Лекция *5.* Интегрирование дробно*-*рациональных функций*.* Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

*A d* (*x*  *a*)

1. ∫ *x*  *a dx*  ∫

*A*

*x*  *a*

 *A*  ln *x*  *a*  *C*

*k*

(формула (2) таблицы интегралов);

(*x*  *a*)*k* 1

2. ∫ (*x*  *a*)*k dx*  *A*  ∫ (*x*  *a*)

*d* (*x*  *a*)  *A* 

*Mx*  *N*

*k* 1

* *C* (формула (1));
1. Рассмотрим интеграл

*J*  ∫ *x*2  *px*  *q dx* .

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим:

*J*  ∫ *Mx*  *N dx* ,

(*x*  *p* )2  *q*  *p*2

2 4

причем *q*  *p*2  0 . Сделаем подстановку

4

*x*  *p*  *t* .

2

Тогда

*x*  *t*  *p* ,

2

*dx*  *dt* .

2

Положим *q*  *p*  *a*2 . Следовательно

,

используя формулы

(2) и

(15)

таблицы интегралов,

4

получаем:

*M* (*t*  *p* )  *N*

*J*  ∫ *Mx*  *N dx*  ∫ 2 *dt*  *M* ∫ *tdt*  (*N*  *Mp* )∫ *dt* 

*x*2  *px*  *q t*2  *a*2

*t* 2  *a*2

2 *t*2  *a*2

 *M* ln(*t*2  *a*2 )  (*N*  *Mp* )  1 *arctg t*  *C* ,

2 2 *a a*

т.е. возвращаясь к переменной *x* ,

 *Mx*  *N*

*N*  *Mp*

*x*  *p*

*J*  ∫

*x*2  *px*  *q*

*dx*  *M* ln(*x*2  *px*  *q*) 2  *arctg* 2  *C*

2

*q* 

*p*2

4

*q* 

*p*2

4

Пример*.* Найти 2*x* 1 *dx* .

∫

*x*2  4*x* 13

Выделим полный квадрат в знаменателе:

*x*2  4*x* 13  (*x*  2)2  9 . Сделаем

подстановку

*x*  2  *t* . Тогда

*x*  *t*  2 , *dx*  *dt* и

2*x* 1 2(*t*  2) 1 2*tdt dt*

∫

∫ *x*  4*x* 13

2

*dx*  ∫

*t*2  9

*dx*  ∫

*t*

2

 3 

9 *t*  9



2

 ln(*t*2  9)  arctg *t*  *C*  ln(*x*2  4*x* 13)  arctg *x*  2  *C*.

3 3

1. Рассмотрим интеграл вида ∫

(*x*2

*Mx*  *N*

* *px*  *q*)

*k dx* ,

*k*   *p*2  0 .

4

2 , *q*

Данный интеграл подстановкой

*x*  *p*  *t*

2

сводится к сумме двух интегралов:

*tdt Mp dt*

∫

2 *p*2

*M*

(*t*2  *a*2

 (*N* 

)*k*

2 )∫

(*t*2  *a*2

)*k* ,

*a*  *q*  .

4

Первый интеграл легко вычисляется:

∫ *tdt*  1 ∫ (*t*2  *a*2 )*k d* (*t*2  *a*2 ) 1  *C* .

(*t*2  *a*2 )*k* 2

2(1 *k*)(*t*2  *a*2 )*k* 1

Вычислим второй интеграл:

 *dt*  1 (*t*2  *a*2 )  *t*2 *dt* 

*J*

2

*k* ∫ (*t*2  *a*2 )*k a* ∫ (*t*2  *a*2 )*k*

(3)

 1 

 *dt* 

*t*2*dt*

  1 

* *t* 2*dt* 

2  ∫

2 2 *k* 1 ∫ 2 2 *k* 

2  *Jk* 1

∫ 2 2 *k* .

*a*  (*t*

* *a* ) (*t*

 *a* )  *a* 

(*t*  *a* ) 

К последнему интегралу из (3) применим формулу интегрирования по частям.

Положим

*u*  *t* ,

*dv* 

*tdt*

(*t*2  *a*2 )*k*

, *du*  *dt* ,

*v*  1 ∫ (*t* 2  *a*2 )*k d* (*t*2  *a*2 ) 1 ,

2  2 2 *k* 1

2(1 *k* )(*t a* )

Тогда

∫ *t* 2*dt*

*t* 1 ∫ *dt* 

(*t*2  *a*2 )*k*

2(1 *k* )(*t* 2  *a*2 )*k* 1

2(1 *k* )

(*t* 2  *a*2 )*k* 1

*t* 1  *Jk* 1 .

2(1 *k*)(*t* 2  *a*2 )*k* 1

2(1 *k*)

Подставляя данный интеграл в равенство (3), получаем

1  *t* 1 

*Jk* 

2  *Jk* 1 

*a* 

2(1 *k* )(*t*

2  *a*2



)*k* 1 2(1 *k*)

* *Jk* 1  ,



т.е.

*dt* 1

 2*k*  3 *t* 

*Jk*  ∫

(*t*2  *a*2 )*k*



*a*2  2*k*  2



*Jk* 1 

2(*k* 1)(*t*

2  *a*2

*k* 1 

) 

Полученная формула дает возможность найти интеграл *Jk*

натурального числа *k*  1 .

для любого

Пример*.* Найти интеграл

*J*3 

 *dt*

2 3 .

∫

(*t*  4)

∫

Здесь а=2, *k*  3 . Так как

*J*1 

*dt*

*t*2  4

 1 arctg *t*  *C* , то

2 2

*J*2  ∫

*dt* 

(*t* 2  4)2



1  2  2  3

4  2  2  2

*J*1 

*t*

2  (2 1)(*t*2



 4)  



1 arctg *t* 

16

8(*t*

*t*

2  4)

* *C* ,

3 *t t*

3  1 *t* 

*J*3 





16

*J*2 

16(*t*



2  4)2 16(*t*



2  4)2

16  16

arctg *t* 

8(*t* 2

 4)   *C* .

Интегрирование рациональных дробей

Рассмотренный выше материал позволяет сформулировать общее правило интегрирования рациональных дробей.

1. Если дробь неправильная, то необходимо представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;
2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;
3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

∫

Пример*.* Найти интеграл

*x*6  3*x*3  2*x*2  2

*x*4  2*x*3  2*x*2 *dx* .

Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель. Получим

*x*6  3*x*3  2*x*2  2  *x*2  2*x*  2  3*x*3  2*x*2  2

*x*4  2*x*3  2*x*2

*x*4  2*x*3  2*x*2 .

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

3*x*3  2*x*2  2

3*x*3  2*x*2  2 *A B Cx*  *D*

    ,

*x*4  2*x*3  2*x*2

*x*2 (*x*2  2*x*  2) *x x*2 *x*2  2*x*  2

3*x*3  2*x*2  2  *Ax*(*x*2  2*x*  2)  *B*(*x*2  2*x*  2)  (*Cx*  *D*)*x*2 ,

т.е.

3*x*3  2*x*2  2  ( *A*  *C*)*x*3  (2 *A*  *B*  *D*)*x*2  (2 *A*  2*B*)*x*  2*B* .

Отсюда получаем систему

 *A*  *C*  3,

2 *A*  *B*  *D*  2,





2 *A*  2*B*  0,

2*B*  2,

из которой находим коэффициенты:

*B*  1,

*A*  1 , *C*  4 ,

*D*  3 . Таким образом

3*x*3  2*x*2  2  1  1 

4*x*  3

*x*4  2*x*3  2*x*2 *x x*2

*x*2  2*x*  2

и

*x*6  3*x*3  2*x*2  2  *x*2  2*x*  2  1  1 



4*x*  3

*x*4  2*x*3  2*x*2

*x x*2

*x*2  2*x*  2 .

Интегрируем полученное равенство:

*x*6  3*x*3  2*x*2  2*dx* 

 *x*2  2*x*  2  1  1  4*x*  3  *dx* 

∫ *x*4  2*x*3  2*x*2 ∫

 

*x x*2

*x*2  2*x*  2 

 *x*3  *x* 2 2*x*  ln *x*  1  ∫ 4*x*  3 *dx*.

3 *x* (*x* 1)2 1

Обозначим

*x*  1  *t* , тогда

*x*  *t* 1 и *dx*  *dt* . Таким образом,

∫ 4*x*  3 *dx*  ∫ 4*t*  4  3 *dt*  4∫ *tdt*  ∫ *dt* 

(*x* 1)2 1

*t* 2 1

*t*2 1

*t*2 1

 4  1 ln(*t* 2 1)  arctg *t*  *C*  2  ln(*x*2  2*x*  2)  arctg(*x* 1)  *C* .

2

Следовательно,

∫ *x*6  3*x*3  2*x*2  2*dx*  *x*3  *x* 2 2*x*  ln *x*  1  2 ln(*x*2  2*x*  2)  arctg(*x* 1)  *C*.

*x*4  2*x*3  2*x*2 3 *x*