# Первообразная функция и неопределенный интеграл

# 1. Под дифференцированием функцииhello_html_m7c9eef15.gifмы понимаем нахождение производной hello_html_m6623fd94.gif.

**2.** Нахождение функции hello_html_585fb870.gifпо заданной ее производной hello_html_m6623fd94.gif называют операцией интегрирования.hello_html_m1cf81dc0.gif

**3.** Таким образом, операция интегрирования обратно операции дифференцирования. Следовательно, операция интегрирования состоит в том, что по заданной производной hello_html_m6623fd94.gif находят (восстанавливают ) функцию hello_html_4414851d.gif.

Определение первообразной функции

* Функцию у= F (x) называют первообразной для функции у=f (x) на заданном промежутке Х, если для всех х ∈ Х выполняется равенство: F′(x) = f (x)

Можно прочесть двумя способами:

1. **f** производная функции **F**
2. ***F*** первообразная для функции **f**

Свойство первообразных

* Если F(x) — первообразная для функции f(x) на заданном промежутке, то функция f(x) имеет бесконечно много первообразных, и все эти первообразные можно записать в виде F(x) + С, где С — произвольная постоянная.

Геометрическая интерпретация

* Графики всех первообразных данной функции f (x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси Оу.

## Правила вычисления первообразных

1. **Первообразная суммы равна сумме первообразных**. Если F(x) — первообразная для f(x), а G(x) — первообразная для g(x), то F(x) + G(x) — первообразная для f(x) + g(x).
2. **Постоянный множитель можно выносить за знак производной**. Если F(x) — первообразная для f(x), и k — постоянная, то k·F(x) — первообразная для k·f(x).
3. Если F(x) — первообразная для f(x), и k, b — постоянные, причём k ≠ 0, то 1/k · F(kx + b) — первообразная для f(kx + b).

**Запомни!**

Любая функция ***F(x) = х2 + С***, где С — произвольная постоянная, и только такая функция, является первообразной для функции **f(x) = 2х.**

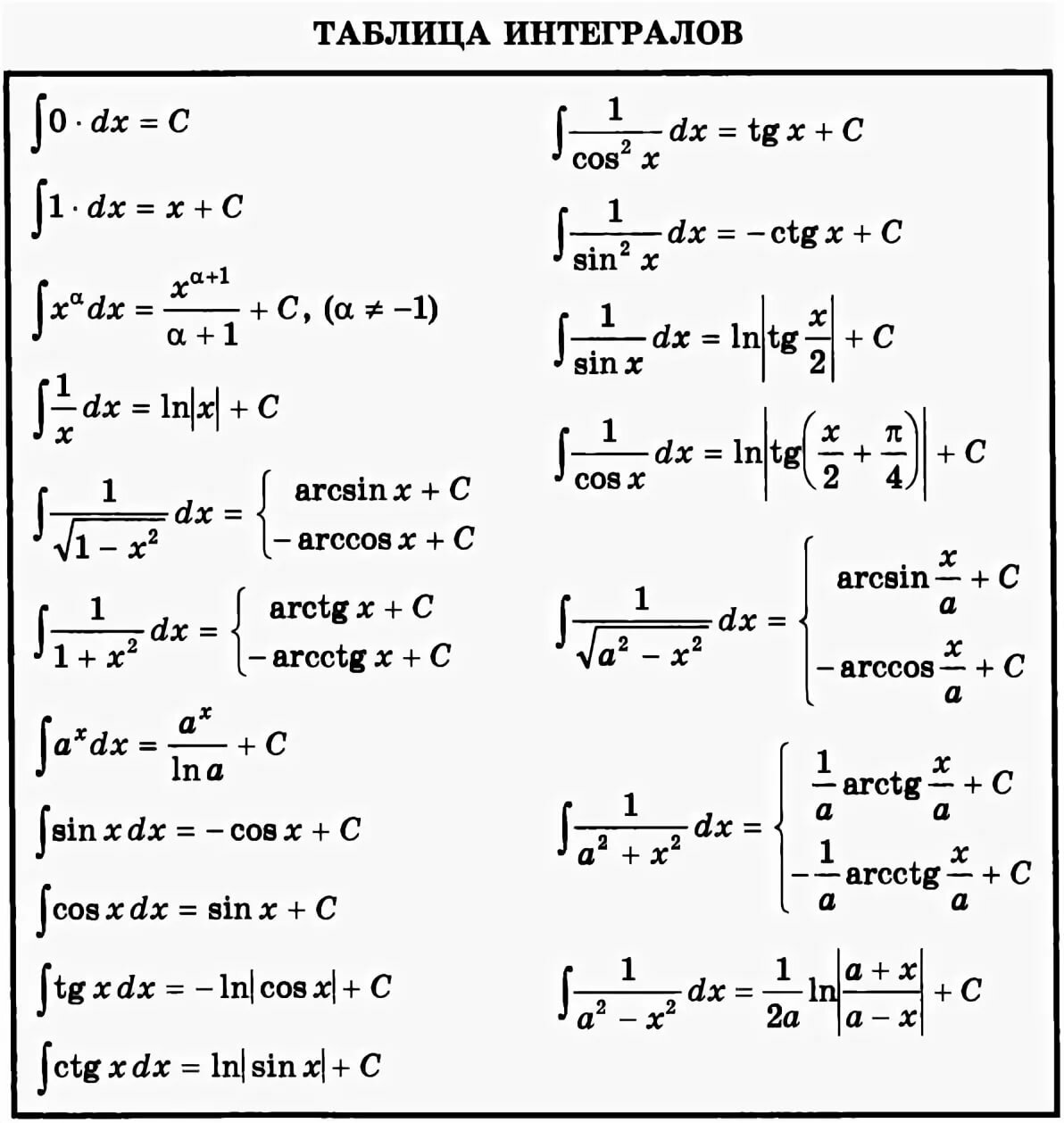
* Например:

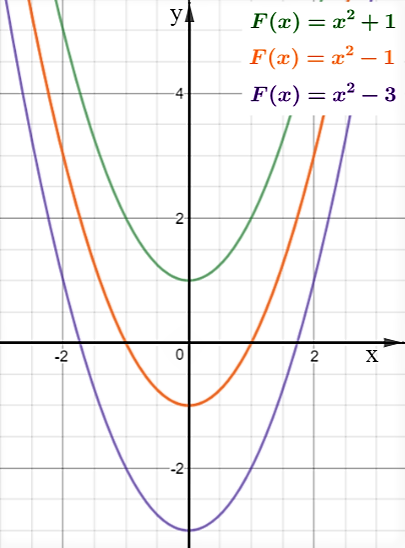
F'(x) = (х2 + 1)' = 2x = f(x);

f(x) = 2х , т.к. F'(x) = (х2 – 1)' = 2x = f(x);

f(x) = 2х , т.к. F'(x) = (х2 –3)' = 2x = f(x);

Таблица первообразных





Связь между графиками функции и ее первообразной:

1. Если график функции f(x)>0 на промежутке, то график ее первообразной F(x) возрастает на этом промежутке.
2. Если график функции f(x)<0 на промежутке, то график ее первообразной F(x) убывает на этом промежутке.
3. Если f(x)=0, то график ее первообразной F(x) в этой точке меняется с возрастающего на убывающий (или наоборот).

Для обозначения первообразной используют знак неопределённого интеграла, то есть интеграла без указания пределов интегрирования.

## Неопределенный интеграл

### Определение:

* Неопределённым интегралом от функции f(x) называется выражение F(x) + С, то есть совокупность всех первообразных данной функции f(x). Обозначается неопределённый интеграл так:  *dx*=*F*(*x*)+*C*

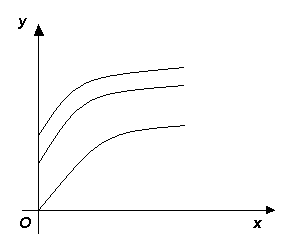
где

* f(x) — называют подынтегральной функцией;
* f(x) dx — называют подынтегральным выражением;
* x — называют переменной интегрирования;
* F(x) — одна из первообразных функции f(x);
* С — произвольная постоянная.

**Основные свойства первообразной функции**.

**1*.****Теорема* . Если функция *F(x)* есть первообразная для функции *f(x*) на промежутке X то при любой постоянной функция *F(x)+C* также является первообразной для функции *f(x*) на промежутке X . любую первообразную функции *f(х)* на промежутке Х можно записать в виде *F(x)+C*.

**2.** Геометрически основное свойство первообразных можно интерпретировать так: графики всех первообразных данной функции *f (x)* получаются с помощью параллельного переноса любого из этих графиков вдоль оси *ОУ.*



**Криволинейная трапеция и ее площадь**

*Определение.* Криволинейной трапецией называют фигуру, ограниченную графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке hello_html_m4133af86.gifфункции *f,* *ОХ* и прямыми *х=а* и*х =b.*

*Теорема* . Пусть *f*-непрерывная и неотрицательная на отрезке hello_html_m4133af86.gif функция, а *S*- площадь соответствующей криволинейной трапеции . Tогда если *F* есть первообразная для *f*на интервале , содержащем отрезок ,то S=F(b)-F(*a*).

**Формула Ньютона -Лейбница**

**1**. Интегралом от *а* до *b* функции *f* называют приращение первообразной F этой функции , т.е. *F(b)-F(a).*

**2.**Интеграл от*а* до*b* функции*f* обозначается так:hello_html_m2871742b.gif , числа *a*и *b*

называют пределами интегрирования , *a-* нижним, *b-* *верхним* *пределом*. Знакhello_html_m41e51a77.gif называют знаком *интеграла*, функцию*f- подынтегральной функцией, х*- *переменной интегрирования.*

**3.**hello_html_20321765.gif -это равенство называют формулой Ньютона – Лейбница.

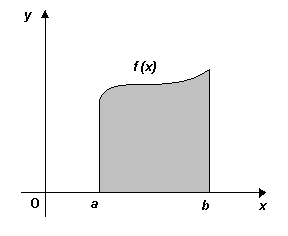
**4.** Формулу для вычисления площади криволинейной трапеции с помощью интеграла можно записать таким образом:

**hello_html_5fe9a0e7.gif**Формула верна для любой функции*f* , непрерывной на отрезке hello_html_m66122705.gif.

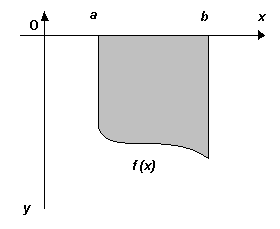
**Вычисление площадей с помощью интеграла**

1. Пусть функция *f*непрерывна и неотрицательна на отрезке hello_html_m2720ea0c.gif. Тогда площадь соответствующей криволинейной трапеции находится по формуле

hello_html_eccfa72.gif



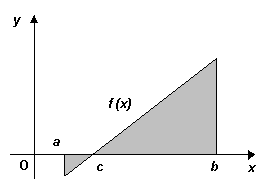
**2.** В том случае, когда непрерывная функция *f(x)* неположительна на отрезке hello_html_m4133af86.gif, для вычисления площади криволинейной трапеции следует использовать формулу S= hello_html_m57cb8a23.gif



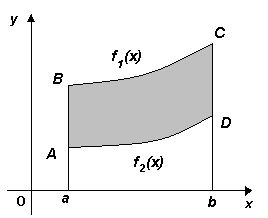
**3.** Пусть функция *f(x )*непрерывна на отрезке hello_html_m4133af86.gifи принимает на этом отрезке как положительные ,так и отрицательные значения. Тогда нужно разбит отрезок hello_html_m4133af86.gifна такие части, в каждой на которых функция не изменяет свой знак, затем вычислить по приведенным выше формулам соответствующие этим частям площади и эти площади сложить.

Например, площадь фигуры, изображенной на рисунке, находится по формуле

hello_html_m565af61a.gif



**4.** Площадь фигуры, ограниченной графиками двух непрерывных функций hello_html_m168854d8.gif и hello_html_7052aea9.gif и двумя прямыми *х=а и х=b,* где hello_html_77932788.gif на отрезке hello_html_m4133af86.gif, находится по формуле hello_html_m700eb9e2.gif



**Практическая часть.**

***Задачи с решениями***

*Задача 1*.Найти все первообразные функции

*а)*hello_html_2f2e19a0.gif*г)*hello_html_4eb669e0.gif

*б)*hello_html_m48e643b2.gif*д*hello_html_m22c30403.gif

*в)*hello_html_m63559d5b.gif*е)*hello_html_m50d801f2.gif

*ж)*hello_html_7b50f99d.gif

Пользуясь таблицей первообразных элементарных функций и свойствами первообразных решим :

*а)*hello_html_286d59e4.gif

*б)*hello_html_548ab32c.gif

*в)*hello_html_m50a6745b.gif

*г)*hello_html_m2e67299e.gif

*д)*hello_html_m404149e0.gif

*е)*hello_html_4441107d.gif

*ж)*hello_html_21bfed6f.gif

hello_html_be53d35.gif

*Задача 2.*Найти первообразную для функции hello_html_m4a5d1942.gif)=hello_html_1eca5bb0.gif график которой

***Вычисление площадей фигур с помощью интеграла.***

*Задача 1.*Найти площадь фигуры, ограниченной осью ОХ и параболой hello_html_m5c9e4687.gif

*Решение.*Находим пределы интегрирования : hello_html_5f0cfc69.gif , hello_html_m51633ea8.gif тогда

hello_html_m66e149b1.gif

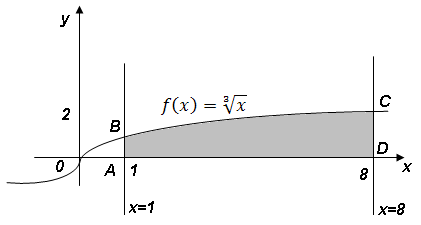


hello_html_m655c6d8a.gif*(кв.ед)*

*Задача 2.*Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми hello_html_76c5d535.gif hello_html_m4fbe856d.gif осьюhello_html_2beef127.gif и графиком функции hello_html_374d8ea9.gif.

a=1 , b=8 , hello_html_m4a5d1942.gif=hello_html_m139673bc.gif*.*

*Решение: f(x)=*hello_html_6f7381e1.gif*, a=1 , b=8*



hello_html_m4fba0e3c.gif

*Задача 3*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой hello_html_41a711ce.gif и прямой, проходящей через точки (4;0) , (0;4) .

*Решение*: Запишем уравнение прямой, проходящей через точки (4;0) и (0;4).

Подставив в уравнение прямой hello_html_1e3ec2c7.gifкоординаты заданных точек, получим систему уравнений

hello_html_m4db26b59.gif , найдем hello_html_2303398a.gif

Следовательно, уравнение прямой имеет вид hello_html_5864d3a6.gif .

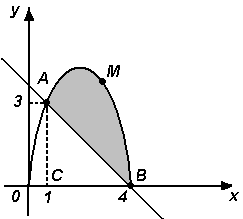
Абсциссы общих точек прямой и параболы определим :

hello_html_4f0f6bed.gif , hello_html_m528d7c91.gif,

hello_html_4481012d.gif

Искомую площадь вычислим как разность площадей криволинейной трапеции

hello_html_6ce07a6c.gifи треугольника hello_html_1e6c4ee8.gif.



hello_html_m6bd94c78.gif

hello_html_2264214.gif

Итак, площадь искомой фигуры hello_html_m738ae38e.gif