# Первообразная функция и неопределенный интеграл

# 1. Под дифференцированием функцииhello_html_m7c9eef15.gifмы понимаем нахождение производной hello_html_m6623fd94.gif.

**2.** Нахождение функции по заданной ее производной  называют операцией интегрирования.

**3.** Таким образом, операция интегрирования обратно операции дифференцирования. Следовательно, операция интегрирования состоит в том, что по заданной производной  находят (восстанавливают ) функцию .

Определение первообразной функции

* Функцию у= F (x) называют первообразной для функции у=f (x) на заданном промежутке Х, если для всех х ∈ Х выполняется равенство: F′(x) = f (x)

Можно прочесть двумя способами:

1. **f** производная функции **F**
2. ***F*** первообразная для функции **f**

Свойство первообразных

* Если F(x) — первообразная для функции f(x) на заданном промежутке, то функция f(x) имеет бесконечно много первообразных, и все эти первообразные можно записать в виде F(x) + С, где С — произвольная постоянная.

Геометрическая интерпретация

* Графики всех первообразных данной функции f (x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси Оу.

## Правила вычисления первообразных

1. **Первообразная суммы равна сумме первообразных**. Если F(x) — первообразная для f(x), а G(x) — первообразная для g(x), то F(x) + G(x) — первообразная для f(x) + g(x).
2. **Постоянный множитель можно выносить за знак производной**. Если F(x) — первообразная для f(x), и k — постоянная, то k·F(x) — первообразная для k·f(x).
3. Если F(x) — первообразная для f(x), и k, b — постоянные, причём k ≠ 0, то 1/k · F(kx + b) — первообразная для f(kx + b).

**Запомни!**

Любая функция ***F(x) = х2 + С***, где С — произвольная постоянная, и только такая функция, является первообразной для функции **f(x) = 2х.**

* Например:

F'(x) = (х2 + 1)' = 2x = f(x);

f(x) = 2х , т.к. F'(x) = (х2 – 1)' = 2x = f(x);

f(x) = 2х , т.к. F'(x) = (х2 –3)' = 2x = f(x);

Таблица первообразных





Связь между графиками функции и ее первообразной:

1. Если график функции f(x)>0 на промежутке, то график ее первообразной F(x) возрастает на этом промежутке.
2. Если график функции f(x)<0 на промежутке, то график ее первообразной F(x) убывает на этом промежутке.
3. Если f(x)=0, то график ее первообразной F(x) в этой точке меняется с возрастающего на убывающий (или наоборот).

Для обозначения первообразной используют знак неопределённого интеграла, то есть интеграла без указания пределов интегрирования.

## Неопределенный интеграл

### Определение:

* Неопределённым интегралом от функции f(x) называется выражение F(x) + С, то есть совокупность всех первообразных данной функции f(x). Обозначается неопределённый интеграл так:  *dx*=*F*(*x*)+*C*

где

* f(x) — называют подынтегральной функцией;
* f(x) dx — называют подынтегральным выражением;
* x — называют переменной интегрирования;
* F(x) — одна из первообразных функции f(x);
* С — произвольная постоянная.

**Основные свойства первообразной функции**.

**1*.****Теорема* . Если функция *F(x)* есть первообразная для функции *f(x*) на промежутке X то при любой постоянной функция *F(x)+C* также является первообразной для функции *f(x*) на промежутке X . любую первообразную функции *f(х)* на промежутке Х можно записать в виде *F(x)+C*.

**2.** Геометрически основное свойство первообразных можно интерпретировать так: графики всех первообразных данной функции *f (x)* получаются с помощью параллельного переноса любого из этих графиков вдоль оси *ОУ.*



**Криволинейная трапеция и ее площадь**

*Определение.* Криволинейной трапецией называют фигуру, ограниченную графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке функции *f,* *ОХ* и прямыми *х=а* и*х =b.*

*Теорема* . Пусть *f*-непрерывная и неотрицательная на отрезке  функция, а *S*- площадь соответствующей криволинейной трапеции . Tогда если *F* есть первообразная для *f*на интервале , содержащем отрезок ,то S=F(b)-F(*a*).

**Формула Ньютона -Лейбница**

**1**. Интегралом от *а* до *b* функции *f* называют приращение первообразной F этой функции , т.е. *F(b)-F(a).*

**2.**Интеграл от*а* до*b* функции*f* обозначается так: , числа *a*и *b*

называют пределами интегрирования , *a-* нижним, *b-* *верхним* *пределом*. Знак называют знаком *интеграла*, функцию*f- подынтегральной функцией, х*- *переменной интегрирования.*

**3.** -это равенство называют формулой Ньютона – Лейбница.

**4.** Формулу для вычисления площади криволинейной трапеции с помощью интеграла можно записать таким образом:

****Формула верна для любой функции*f* , непрерывной на отрезке .

**Вычисление площадей с помощью интеграла**

1. Пусть функция *f*непрерывна и неотрицательна на отрезке . Тогда площадь соответствующей криволинейной трапеции находится по формуле





**2.** В том случае, когда непрерывная функция *f(x)* неположительна на отрезке , для вычисления площади криволинейной трапеции следует использовать формулу S= 



**3.** Пусть функция *f(x )*непрерывна на отрезке и принимает на этом отрезке как положительные ,так и отрицательные значения. Тогда нужно разбит отрезок на такие части, в каждой на которых функция не изменяет свой знак, затем вычислить по приведенным выше формулам соответствующие этим частям площади и эти площади сложить.

Например, площадь фигуры, изображенной на рисунке, находится по формуле





**4.** Площадь фигуры, ограниченной графиками двух непрерывных функций  и  и двумя прямыми *х=а и х=b,* где  на отрезке , находится по формуле 



**Практическая часть.**

***Задачи с решениями***

*Задача 1*.Найти все первообразные функции

*а)**г)*

*б)**д*

*в)**е)*

*ж)*

Пользуясь таблицей первообразных элементарных функций и свойствами первообразных решим :

*а)*

*б)*

*в)*

*г)*

*д)*

*е)*

*ж)*



*Задача 2.*Найти первообразную для функции )= график которой

***Вычисление площадей фигур с помощью интеграла.***

*Задача 1.*Найти площадь фигуры, ограниченной осью ОХ и параболой 

*Решение.*Находим пределы интегрирования :  ,  тогда





*(кв.ед)*

*Задача 2.*Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми   осью и графиком функции .

a=1 , b=8 , =*.*

*Решение: f(x)=**, a=1 , b=8*





*Задача 3*. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой  и прямой, проходящей через точки (4;0) , (0;4) .

*Решение*: Запишем уравнение прямой, проходящей через точки (4;0) и (0;4).

Подставив в уравнение прямой координаты заданных точек, получим систему уравнений

 , найдем 

Следовательно, уравнение прямой имеет вид  .

Абсциссы общих точек прямой и параболы определим :

 , ,



Искомую площадь вычислим как разность площадей криволинейной трапеции

и треугольника .







Итак, площадь искомой фигуры 