**Цилиндр. Площади поверхностей. Объём**

**Цилиндр** – это тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг прямой, проходящей через одну из его сторон.

Назовём элементы цилиндра.

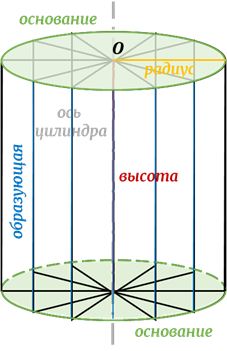
**Основания цилиндра** – два равных круга радиуса https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image001.png.

Отрезок, соединяющий окружности оснований и перпендикулярный основаниям, называется **образующей** цилиндра и обозначается https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image002.png. Все образующие цилиндра параллельны и равны.

**Осью**цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.

**Высот**а цилиндра https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image003.png – перпендикуляр, опущенный из любой точки одного основания на другое, или другими словами, это расстояние между плоскостями оснований цилиндра. Образующая цилиндра равна его высоте.

**Радиусом** цилиндра называется радиус его основания.



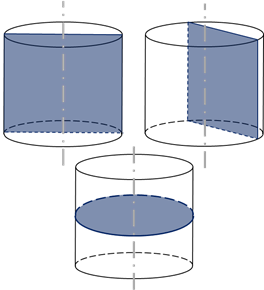
Цилиндр называется **равносторонни**м, если его высота равна диаметру основания.

https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image005.png

**Осевым сечением** цилиндра называется сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось. **Осевое сечение цилиндра** – прямоугольник, две стороны которого есть образующие цилиндра, а две другие – диаметры его оснований.

Сечение, параллельное оси цилиндра, является **прямоугольником**.

Сечение, перпендикулярное оси цилиндра, является кругом, равным основаниям цилиндра.



**Боковая поверхность** цилиндра может быть развёрнута в прямоугольник со сторонами, одна из которых равна длине окружности основания, другая – высоте цилиндра.

**Площадь боковой поверхности** цилиндра можно вычислить по следующим формулам:

https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image007.png, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image008.png, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image009.png,

где https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image010.png – длина окружности основания, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image003.png – высота цилиндра, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image001.png – радиус основания, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image002.png – образующая.

**Площадь полной поверхности** цилиндра равна сумме площади боковой поверхности цилиндра и двух площадей его оснований.

Тогда площадь полной поверхности цилиндра можно вычислить по формуле:

https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image011.png,

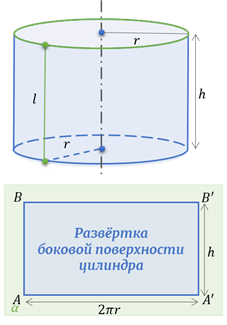
где https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image001.png – радиус оснований цилиндра, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image003.png – его высота.

**Объём** цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

Тогда его можно вычислить по формуле:

https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image012.png,

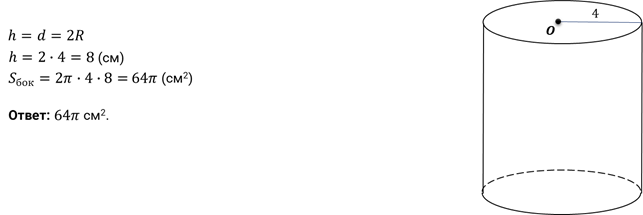
где https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image001.png – радиус оснований цилиндра, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image003.png – его высота.



Основные моменты мы с вами повторили, а теперь давайте перейдём к практической части занятия.

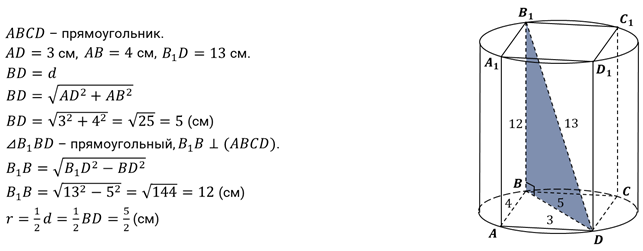
Задача первая. Радиус основания цилиндра равен https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image014.png см, высота цилиндра равна диаметру его основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

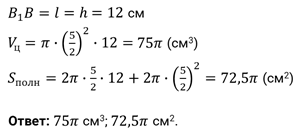
Решение.



Задача третья. Призма со сторонами основания https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image022.png см и https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image014.png см и диагональю https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image023.png см вписана в цилиндр. Найдите объём и площадь полной поверхности цилиндра.

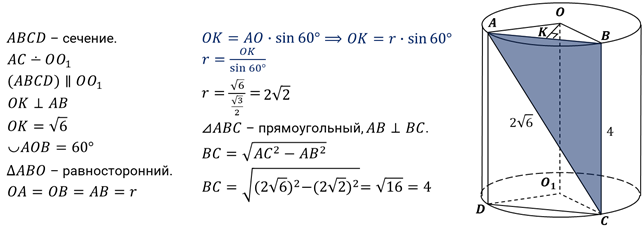
Решение.

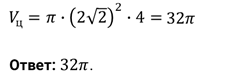




Задача четвёртая. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image026.png. Диагональ полученного сечения равна https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image027.png и удалена от оси цилиндра на расстояние https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image028.png. Найдите объём цилиндра.

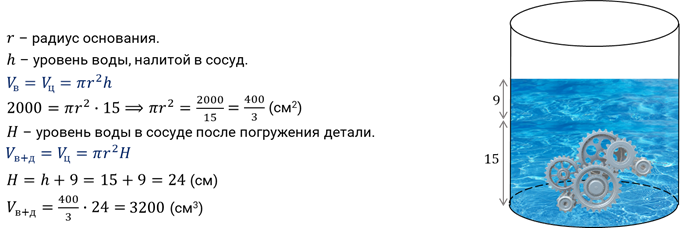
Решение.

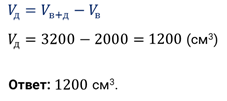




Задача пятая. В цилиндрический сосуд налили https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image031.png см3 воды. Уровень жидкости оказался равным https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image032.png см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/38-cilindr-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image033.png см. Найдите, чему равен объём детали. Ответ выразите в см3.

Решение.





### Конус. Площади поверхностей. Объём

Конус – это тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, проходящей через один из его катетов.

Назовём элементы конуса.

**Осью** конуса называется прямая вращения.

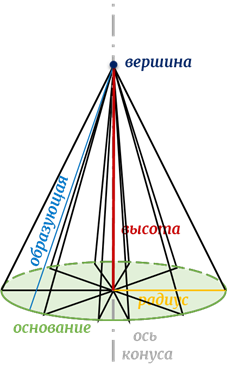
**Основание** конуса – круг радиуса https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image001.png, который равен катету треугольника вращения.

**Радиу**с конуса https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image001.png – это радиус его основания.

**Вершина** конуса – неподвижная вершина треугольника вращения.

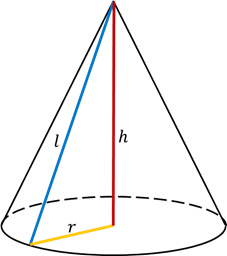
**Образующая** конуса https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image002.png – отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания. Все образующие конуса равны между собой.

**Высота** конуса https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image003.png – перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость его основания. Высота конуса совпадает с неподвижным катетом треугольника вращения.



В конусе радиус основания https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image005.png, высота https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image006.png и образующая https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image007.png связаны следующим соотношением:

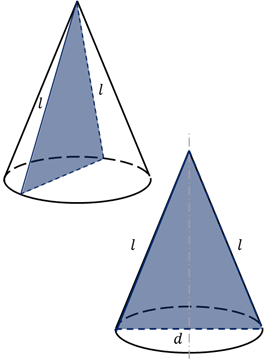
https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image008.png.



Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса.

**Осевым сечением** конуса называется сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось.

**Осевое сечение** конуса – равнобедренный треугольник, боковые стороны которого – образующие, а основание – диаметр основания конуса.



**Боковую поверхность конуса**, как и боковую поверхность цилиндра, можно развернуть на плоскость, разрезав её по одной из образующих. Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор.



Обратите внимание, радиус сектора равен образующей https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image007.png конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса.

**Площадь боковой поверхности** конуса можно вычислить по следующим формулам:

https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image012.png, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image013.png, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image014.png,

где https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image015.png – длина окружности основания, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image005.png – радиус основания, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image007.png – образующая.

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площади боковой поверхности конуса и площади его основания.

Тогда **площадь полной поверхности** конуса можно вычислить по формуле^

https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image016.png,

где https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image005.png – радиус основания конуса, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image007.png – его образующая.

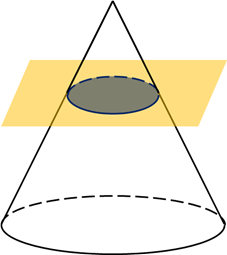
**Объём** конуса равен одной третьей произведения площади основания на высоту.

Тогда его можно вычислить по формуле:

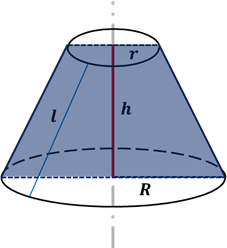
https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image017.png,

где https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image005.png – радиус основания конуса, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image006.png – его высота.

Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность – по окружности с центром на оси конуса. Эта плоскость разбивает конус на две части. Одна из частей (верхняя) представляет собой конус, а вторая (нижняя) называется **усечённым конусом**.



**Усечённым конусом** называется часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания. Усечённый конус имеет**ось**, **высоту** https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image003.png, **радиусы** оснований https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image001.png и https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image019.png, **образующую** https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image002.png. Осевое сечение усечённого конуса – равнобедренная трапеция.



Площадь боковой поверхности усечённого конуса и объём усечённого конуса равен разности площадей боковых поверхностей и объёмов полного конуса и отсечённого.

https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image021.png, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image022.png

**Площадь боковой поверхности усечённого конуса** можно найти по следующим формулам:

https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image023.png , https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image024.png

**Объём усечённого конуса** можно вычислить по следующим формулам:

https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image025.png,

где https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image026.png и https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image027.png – площади оснований, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image006.png – высота усечённого конуса;

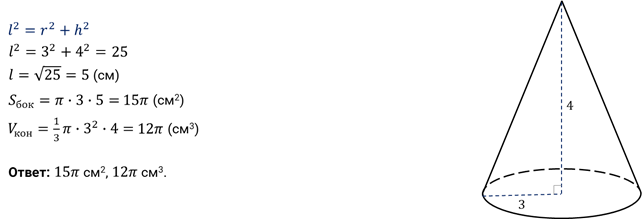
или https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image028.png,

где https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image006.png – высота усечённого конуса, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image005.png и https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image029.png – радиусы верхнего и нижнего оснований.

Основные моменты мы с вами повторили, а теперь давайте перейдём к практической части занятия.

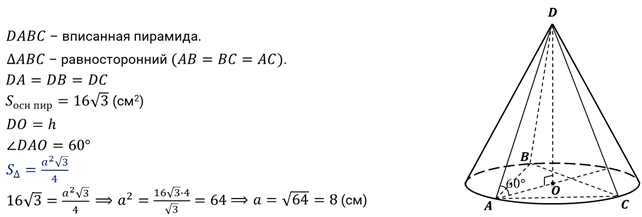
Задача первая. Радиус основания конуса равен https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image030.png см, высота конуса равна https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image031.png см. Найдите площадь боковой поверхности и объём конуса.

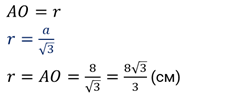
Решение.

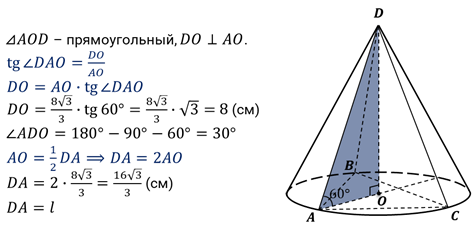


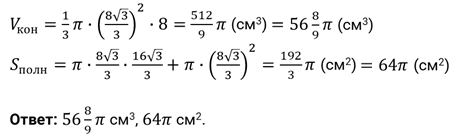
Задача вторая. В конус вписана правильная треугольная пирамида с площадью основания https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image033.png см2 и углом наклона бокового ребра к основанию, равным https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image034.png. Найдите объём и площадь полной поверхности конуса.

Решение.









Задача четвёртая. Длины радиусов оснований и образующей усечённого конуса равны соответственно https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image046.png см, https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image047.png см и https://fsd.videouroki.net/products/conspekty/mathege/39-konus-ploshchadi-poverhnostej-obyom.files/image048.png см. Вычислите его высоту.

Решение.